中国科学院暑假学校讲义: 群表示论的一些小知识

薛航

2019 年 5 月 27 日

一点废话

这是我 2019 年在中国科学院暑假学校的讲义. 注意, 是小知识, 不是冷知识. 另外, 这是讲义, 不是书,所以充斥着大量口水话. 书嘛, 好书太多了, 我也没那本事能写得比别人好.

第一节是一些常识性的内容, 希望大家来北京之前就能有所了解. 真不是我懒(虽然我确实比较懒), 但这些内容就是定义,讲起来枯燥乏味, 还不如大家自己看看书效果好. 这一节最后我们列举了几个暑假学校将要学习的主要结果.

第二节第三节我们分别讨论有限群和紧群的Peter-Weyl定理. 这是表示论最基本最重要的定理. 如果大家实在对泛函分析没兴趣, 打死也不想积分, 跳过紧群的内容似乎也没有什么不妥. 不过相信我, 总有一天你还是得老老实实算积分的.

第四节我们回到有限群, 讨论诱导表示的相关问题. 这是构造表示的基本工具.

第五节我们讨论一个例子: $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的表示. 这是最简单的李型群, 它的表示论能给我们后面进一步学习和研究提供很好的启发.

第六节我们列举一些相对复杂的材料作为大家考虑的问题. 这些问题大部分都有深入的背景. 但这些问题都被包装好了使得他们能够仅用前五节的知识和方法处理. 希望这些问题能够激发大家进一步思考的热情. 当然这只是一厢情愿, 欢迎大家对这些问题的安排提出自己的意见.

我们最后提一下关于学习的一些看法. 首先, 对于有志于学习数学的学生, 到了一定的程度(取决于大家的天分, 但大致上以实变函数抽象代数)为界, 再学新东西, 第一次就什么都弄明白是不太现实的. 其次, 也是恰恰到了这个阶段, 对于学习的要求也大大提升了, 一般来说, 它要求我们在短时间之内搞懂一门学问的核心内容. 这无疑是巨大的挑战.

问题来了, 什么叫学懂了? 我想强调一点, 至少是我认为很重要的一点, 把定理的证明都过一遍甚至记住它并不等价于真正意义上的懂. 我认为, 学习最要紧的是建立正确的直观, 正确直观的建立是学懂的标志. 什么是正确的直观? 我觉得意思应该是说当看到某个定义某个定理的时候, 脑袋里能本能地建立下面这些东西: 最具有代表性最能反映问题本质的例子, 定义或者定理的合理性(为什么是这样定义而不是那样定义), 为什么要做这样的定义或者是为什么要做这样的定理, 这个定理为什么是对的, 有没有什么哲学上的原因能解释这个定理, 等等. 举个小例子. 我们看到定理"函数Riemann可积分当且仅当函数的间断点集是零测集"的时候会想到什么? 下面是几个重要的方面: (1) 零测集的意思是说集合里的点不太多, 但这个条件又比可数稍微弱一点; (2) Riemann可积分说明函数连续性不能太差, 这个定理给出了"不能太差"的准确意义, 所以它应该是对的; (3)Riemann函数是一个在所有有理数点处间断无理数点连续的函数, 所以它是可以积分的. 你也许还能想到别的很多东西, 但我想说的是, 相对于这几样东西, 定理本身的证明并没有那么要紧.

数学是需要积累的, 积累的不仅仅是知识,而是直观,是例子.今天抽象的内容明天就成了更抽象的内容的例子.就如同矩阵可以作为线性方程组的抽象, 而矩阵本身又是更一般算子的具体例子. 有个很玄学的东西叫做数学成熟度. 我想, 脑子里的例子的丰富程度也算是数学成熟度的重要方面吧.

我们学习的过程中, 往往是靠着例子向前推进的. 碰到一个定义或者定理, 先举个例子给自己看看, 看看自己能不能举一个不那么平凡的例子. 正面的反面的例子都需要. 例子算多了自然就有了感觉. 比方说, 学习群, 我们首先问自己,我们脑袋里有多个具体的群的例子? 我们对这些例子到底了解到什么程度? 比方说我们会碰到一个经典的结果: 最小的非交换单群为什么是 A_5? 我们第一反应, 为啥? 先试试咯, 拿几个阶数比 60 小的群来试试. 然后我们发现, 随便试个什么例子, 总有这样那样的原因使得它不是非交换单群. 在试错的过程中你会碰到Sylow定理, 会碰到关于 p-群的结果, 会碰到其他各种各样的小结论. 当你试了足够多的例子你觉得自己心理上已经能接受"最小单群是 A_5" 的时候, 虽然你没看证明, 其实你已经基本上"懂"这个结论了, 因为你大体上已经知道的别的群为什么不行. 又比方说, 学习Galois理论, 我们先看到了Galois理论的主定理.这个时候就自己来试试手呗.我们自己拿个方程来算算Galois群(比方说x^3+x+1的Galois群你会算吗?),或者随便写个域扩张问问是不是Galois扩张? 能不能写下所有的中间域? 古人云: 书读百遍, 其义自见. 但那时古人的书,古文观止不知道会不会读上百遍就能秒懂.学数学光读书百遍或许就没什么用了, 但例子算百遍绝对是有益的.

另一方面, 怎么能快速的抓住一门学问的核心内容? 最简单的答案: 让懂行的人给你讲. 从别人那学习, 尤其是学习骨干内容, 是效率最高的方法. 对于这门课, 我尽我最大的努力去做那个懂行的人, 去给大家用尽可能简洁直接的方法描述表示论(我认为)最要紧的内容. 稍微复杂一点的答案:把书读薄. 华罗庚告诉过我们, 读书要先读厚, 再读薄. 我想,读厚的过程是算例子建立直观的过程,读薄的过程是抓住主干内容的过程.我们前面说的都是把书读厚的过程.怎么把书读薄?一个简单的练习是,给你一个小时的时间,讲讲一门学问最主要的内容.最重要的研究对象是什么?最要紧最本质的定理是什么?这个定理为什么是对的(注意这不是证明而是哲学)? 这时候我们就要去粗取精,直捣黄龙,一切问题只为核心服务.我没有办法帮大家把书读厚, 那需要大家自己疯狂的努力. 我希望这门课能为把书读薄的过程做一点小小的贡献.

我离一名优秀的数学家和优秀的数学教师都还差得很远(这里要隆重请出我的老师和各位师兄们), 这让我对很多问题的认知或许不是最优的. 我的文学修养也十分有限, 写下的东西可能言不及义, 可能没法表达出我心里最本质的想法. 不过不要紧, 这个世界上有学问和修养都远远高于我的人, 他们写过很多值得一读的东西. 这里强力推送两本书的前言:

1. Polya, Szego, 分析中的问题与定理. 这是经典中的经典. 习题恒久远, 一本永流传. 书的前言读起来让人爽得欲仙欲死.

2. 伍洪熙, 黎曼几何初步. 我不是几何学家无法评价这本书的内容, 但前言却让我读过不下十遍. 在我极其有限的阅读范围之内这是最优秀的中文数学书前言.

作为结尾, 我请出两本表示论教材.

1. Serre. 有限群表示

2. Fulton, Harris. 表示论.

这两本书真是把书读厚和把书读薄的经典教案. Serre的书就是薄, 言简意赅, 三言两语直指核心. 我最崇拜 Serre写书, 简直要想把膝盖直接送给他老人家了. Serre写书证定理如砍瓜切菜,

各种困难仿佛瞬间灰飞烟灭. 当然这书太干了读快了容易噎. Fulton和Harris的书就是厚, 没有什么内容得厚,罗哩叭嗦婆婆妈妈说了一大堆废话. 这是把书读厚的经典: 里面全是例子! 全是例子! 全是例子! 例子带你飞, 爽歪歪有木有!

目录

1 一些基本常识

这里我们列举一些参加暑假学校之前建议学习的预备知识. 大家来热热身.

1.1 表示论常识

学习建议:

1. Serre. 有限群表示第一章.

2. Fulton, Harris. 表示论第一部分.

下面我们还是回忆一下一些基本的定义, 顺便约定一下记号.

设 G 是一个群, V 是一个线性空间, 所谓 G 在 V 上的表示是指 G 在 V 上的一个线性作用, 也就是说对每一个 $g \in G$, 我们都给一个 V 上的线性变换 $\rho(g)$ 满足 $\rho(g_1g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ 对所有的 $g_1, g_2 \in G$ 都成立. 换言之, G 在 V 上的表示是一个群同态 $G \to \mathrm{GL}(V)$. 这样的表示我们通常记为 (ρ, V), 或者简单记为 ρ, 有时也简记为 V. 表示的维数就是 V 的维数, 常常记为 $\dim V$ 或者$\dim\rho$.如果(ρ, V) 和 (τ, W) 是 G 的表示, 他们之间的同态是一个线性映射 $f : V \to W$满足$f(\rho(g)v) = \tau(g)f(v)$ 对所有的 $g \in G$ 和 $v \in V$ 都成立(也就是说线性映射和群作用交换). 两个表示同构是指存在一个同态 f, 使得它是线性空间的同构. 同态的全体我们记为$\mathrm{Hom}_G(V, W)$.

我们这里并没有指定 V 到底是哪个域上的线性空间. 我们这门课只考虑 V 是复线性空间的情况. 这样的表示一般叫复表示. 别的情况, 特别是 V 是特征 $p > 0$ 域上的线性空间的情况是当前活跃的研究课题. 这种表示往往叫模 p 表示.

所谓的 V 的子表示 W 是指 W 是 V 的 G 不变子空间. 两个表示的直和是指线性空间做直和, 群G在线性空间分块作用. 一个表示是不可约的是说它没有真不变子空间. 一个表示是半单的或者是完全可约的是说它能分解成不可约子表示的直和. 我们要注意, 这些定义对于有限维表示一般是合理的, 但如果表示空间是无限维的, 一般来说还需要有拓扑学上的考虑来保证得到我们想要的性质. 对我们这门课讨论的表示来说, 大部分是有限维的,少数拓扑学上的考虑一般也比较简单. 这里暂时不表, 需要用到的时候再谈.

给定群 G, 考虑 G 上全体函数形成的线性空间 $\mathbb{C}[G]$. 群 G 作用在 $\mathbb{C}[G]$ 上有两个作用, 分别称之为左右正则作用, 定义如下. 设 $f \in \mathbb{C}[G]$, $g, x \in G$. 左正则作用 $(\mathsf{L}, \mathbb{C}[G])$ 定义为

$$(\mathsf{L}(g)f)(x) = f(g^{-1}x),$$

左正则作用 $(\mathsf{R}, \mathbb{C}[G])$ 定义为

$$(\mathsf{L}(g)f)(x) = f(xg).$$

大家想想为什么是这样定义而不是别的, 比方说 $(\mathsf{L}(g)f)(x) = f(gx)$.

我们现在解释表示论的两个常规操作: 对偶和张量积.

设 (ρ, V) 是一个表示, $V^\vee$ 是 V 的对偶空间(V 上全体线性函数形成的空间), 那么 G 在 $V^\vee$ 上有作用 $(\rho^\vee(g)l)(v) = l(\pi(g)v)$, $l \in V^\vee$, $g \in G$, $v \in V$. 这叫做 V 的对偶表示(或者叫逆步表

示). 如果 (ρ, V) 和 (π, W) 是两个 G 的表示, 那么 G 作用在张量积 $V\otimes W$ 上, 这个表示我们记作 $\rho\otimes\pi$. 它由 $(\rho\otimes\pi)(g)(v\otimes w)=\rho(g)v\otimes\pi(g)w$ 给出. 我们有

$$\mathrm{Hom}_G(V,W)=(V^\vee\otimes W)^G,\quad \mathrm{End}_G(V)=(V\otimes V^\vee)^G.$$

这里上标 G 表示取 G 不变元素, 即 G 的特征值等于一的特征子空间(自己想想怎么证).

设 (ρ, V) 是一个表示. 张量积 $V\otimes V$ 中由 $v\otimes w+w\otimes v$ 生成的子空间称为对称(二次)张量积, 记为 $\mathrm{Sym}^2 V$. 由 $v\otimes w-w\otimes v$ 生成的子空间称为反对称(二次)张量积, 记为 $\wedge^2V$. 它们都是 G 不变子空间, 从而也是G的表示. 我们显然有

$$V\otimes V\simeq \mathrm{Sym}^2 V\oplus\wedge^2V.$$

假设 G 是有限群. 下面是几个基本的结果.

1. Schur引理: 如果 $(\rho, V),(\pi, W)$ 都是不可约表示，那么

$$\dim\mathrm{Hom}_G(V,W)=\begin{cases}1, & V\simeq W;\\ 0, & V\not\simeq W.\end{cases}$$

   证明: 很简单, 如果有同态 $f\in\mathrm{Hom}_G(V,W)$, 那么 $\mathrm{Ker}\, f$ 和 $\mathrm{Im}\, f$ 都是G 不变子空间. 由不可约性 f 要么是同构, 要么是零同态. 如果 (ρ, V) 和 (π, W) 同构, 我们不妨假设$V=W$. 固定一个 $\alpha\in\mathrm{Hom}_G(V,V)$. 那么存在 $v\neq 0$ 使得 $\alpha(v)=\lambda v$, $\lambda\in\mathbb{C}$. 由于 V 是不可约的, 那么 V 中任何元素都可以写成形如 $\rho(g)v'$ 元素的线性组合. 我们总有 $\alpha(\rho(g)v')=\lambda\rho(g)v'$. 于是 $\alpha=\lambda\,\mathbf{1}_V$. 证毕.

2. Weyl酉化技巧: 有限维表示 (ρ, V) 上存在 G 不变正定Hermitian二次型.

   证明: 也很简单, 先在 V 上随便取一个正定Hermitian二次型 $(-,-)$, 然后在群 G 上做平均:
$$\langle v,w\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle\rho(g)v,\rho(g)v\rangle.$$
   很容易就能证明这也是正定Hermitian二次型, 而且是 G 不变的(这就是为什么要在群上平均一下,注意这里用到了 G 是有限群的条件).

3. Mascheke定理: 有限维表示都是半单的.

   证明: 更简单. 设 (ρ, V) 是有限维表示, 如果 ρ 不可约那就没啥好说的了. 若不然, W 是真子表示. 取 V 上 G 不变正定二次型和 W 在此二次型下的正交补 $W^\perp$. 那么 $W^\perp$ 也是真子表示, $V=W\oplus W^\perp$. 再用归纳法就搞定了. 证毕.

建议练习题:

1. 证明有限群的不可约表示都是有限维的.

2. 假设 G 和 H 都是有限群, (ρ, V) 是 $G\times H$ 的不可约表示. 证明存在 G 的不可约表示 (π, W) 和 H 的不可约表示 (σ, U), 使得 $V\simeq W\otimes U$, $G\times H$ 的作用由下式给出: $\rho(g,h)(w\otimes u)=\pi(g)w\otimes\sigma(h)u$. 此时 ρ 一般称为 π 和 σ 的外张量积, 记为 $\rho=\pi\boxtimes\sigma$.

3. 设 G 是有限群, V 是 G 的(有限维)表示. 证明: 如果 V 上存在一个G 不变对称二次型, 那么 $\mathrm{Sym}^2 V$ 包含 G 的平凡表示; 如果 V 上存在一个 G 不变反对称二次型,那么 $\wedge^2 V$ 包含 G 的平凡表示.证明, 如果进一步假设 V 是不可约的,那么反之亦然.

4. 证明abel群的不可约表示一定是一维的. 证明任何群 G 的表示一定通过 G^{ab} 分解.

5. 证明二面体群的不可约表示要么是一维的要么是二维的. 由此分类二面体群所有的不可约表示(不要到处查书, 没意思, 就用定义手工搞, 一波常规操作搞定)

1.2 泛函分析常识

我们不打算花篇幅解释泛函分析的一些基本知识, 之给出一些学习的建议和最重要的定理.

学习建议: 测度论想必大家都学过了, 复习一下就好. Haar测度可以参考wikipedia. 紧算子的谱定理亦可参考wikipedia(学不明白想想有限维对称矩阵的谱定理)或者北大泛函分析第四章. 不要被吓到了, 其实你需要的仅仅是几个定义而已.

1. Haar测度指的是一个拓扑群上左平移不变(或者右平移不变)的测度. 这样的测度在差一个常数的意义下是唯一的. 在紧群上和abel群上左不变测度一定是右不变的. 你只需要知道这件事情就可以了. 不要看证明, 完全没用.

2. 紧算子(有限秩算子的极限)和全连续算子(把定义域中的弱收敛变成值域中的强收敛). 如果定义域是 Hilbert空间, 那么紧算子等价于全连续算子. Hilbert空间上自伴随紧算子的谱定理: 空间是特征子空间的完备直和, 特征值只能以 0 为凝聚点, 不为零特征值的特征子空间都是有限维的.

建议练习题:

1. 熟悉几个常见的拓扑群, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{U}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n,R)$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, etc. 这里面那些群是紧的? 你能具体写下这些群上的Haar测度吗?

2. 证明 $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})=\widehat{\bigoplus}_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}e^{2\pi inx}$, $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})=\widehat{\bigoplus}_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}e^{2\pi inx}$. 提示: 这是 Fourier分析中两个重要定理的豪华版.

3. 设 G 是一个紧拓扑群. 考虑 G 上的连续函数空间 $C(G)$和平方可积函数空间$L^2(G)$. 给定 $\varphi\in C(G)$. 证明卷积算子 $L^2(G)\to C(G)$

$$f\mapsto\left(x\mapsto\int_G\varphi(g)f(g^{-1}x)\mathrm{d}g\right)$$

是紧算子(利用Arzela–Ascoli定理). 如果 φ 取实数值, 满足 $\varphi(g)=\varphi(g^{-1})$, 那么进一步证明卷积算子在 L^2 内积下是自伴随算子.

1.3 主要结果

表示论的主要任务是什么?

1. 给定群, 分类所有的表示. 或者至少分类我们关心的那些表示, 比方说酉表示. 是不是想到了被有限单群分类支配的恐怖! 什么叫分类? 基本上是说把表示的信息全息转化成别的我们觉得可能更容易的信息. 简单的手法是把表示的信息转化成群结构的信息, 比方说群上共轭类的信息. 事实上, 群的共轭类和和表示的等价类是互为表里的, 两者所传递出来的信息在某种意义上来说等价的. 研究这种等价性是群论和表示论的重要组成部分. 通过研究群的共轭类我们可以理解表示的信息. 反过来, 如果我们能对表示说很多话, 那么我们也就对群的结构有了更深刻的认识.

2. 给定群上的某个具体的表示, 将它分解成不可约表示的直和(不一定能做到, 做不到的话问合成列等等). 随便给个群, 具体的表示能有什么呢? 基本上就一个: 正则表示! 我们这门课要花不小的力气研究正则表示. 如果 G 有一个性质比较特别的子群 H, 那么我们还可以研究 $H\backslash G$ 上的连续函数空间, G 在上面通过右平移作用. 所谓的自守表示大致就是这种情况. 最简单的情况是 $G=\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $H=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

我们列举几个暑假学校将要学习的主要结果供大家欣赏.

1.3.1 定理: 有限群的正则表示

设 G 是有限群. 那么作为 $G\times G$ 表示, 我们有分解

$$\mathbb{C}[G]\simeq\bigoplus_{\pi}\pi\otimes\pi^{\vee},$$

其中 π 过遍 G 所有不可约表示. 群 G 不可约表示的个数等于 G 上所有共轭类的个数.

主要的工具是有限群的特征标理论.

1.3.2 紧群的Peter–Weyl定理

设 G 是紧群. 那么作为 $G\times G$ 表示, 我们有分解

$$L^2(G)\simeq\widehat{\bigoplus_{\pi}}\pi\otimes\pi^{\vee},$$

其中 π 过遍 G 所有不可约表示. 群 G 上的任何连续函数都可以用不可约表示的矩阵系数的线性组合一致逼近.

我们主要利用紧算子的谱定理.

1.3.3 小例子: 有限域上的二阶矩阵群

对于群 $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, $2\nmid q$, 我们先定个小目标: 具体构造出所有的不可约表示. (对于$q=3,5,7$, 大家可以想想怎么做, 算算特征标表啥的)

我们主要的工具是有限群的Weil表示. 在此过程中我们也将学习诱导表示和Mackey理论.

2 有限群的特征标

我们在这一节讨论有限群的特征标理论. 这是有限群表示论最有力的工具之一.

这一节我们总假设 G 是一个有限群.

2.1 正交关系

设 (π, V) 是 G 的表示, 我们定义 π 的特征标(character)为 G 上的函数

$$\chi_\pi(g) = \mathrm{Trace}(\pi(g)).$$

特征标的重要意义在于, 把抽象代数的转化成了具体的计算问题. 这样就爽到了.

注意, 我们很多时候会谈论abel群的特征. 这个时候特征特别的是指从abel群到$\mathbb{C}^\times$ 的同态. 大家可以观察到实际上这里的特征等价于abel群不可约表示的特征.

特征标有一些简单的性质, 比方说

1. $\chi_{\pi\oplus\sigma} = \chi_\pi + \chi_\sigma$, $\chi_{\pi\otimes\sigma} = \chi_\pi \cdot \chi_\sigma$.
2. $\chi_{\pi^\vee}(g) = \overline{\chi_\pi(g)} = \chi_\pi(g^{-1})$.
3. $\chi_\pi(1) = \dim V$.
4. 特征标是 G 上共轭类的函数(这种函数称为类函数), 即对于任意 $g, h \in G$, 有 $\chi_\pi(h^{-1}gh) = \chi_\pi$.

2.1.1 引理

记号同上. 令 $V^G = \{v \in V \mid \pi(g)v = v\}$. 那么

$$\chi_{\pi,V}(g) = \chi_{\pi,V^G}(g).$$

证明: 考虑线性变换 $T : V \to V$,

$$T = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi(g).$$

则 $T^2 = T$, V^G 是 T 特征值等于一的特征子空间. 后面不需要我说怎么证了吧.证毕.

所谓的特征标正交关系, 指的是下面的定理.

2.1.2 定理

设 π, σ 是 G 的不可约表示. 那么

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\pi(g)\overline{\chi_\sigma(g)} = \begin{cases} 1 & \pi \simeq \sigma; \\ 0, & \pi \not\simeq \sigma. \end{cases}$$

证明: 证明很简单. 我们有

$$\chi_\pi(g)\overline{\chi_\sigma(g)} = \chi_{\pi\otimes\sigma^\vee}(g) = \chi_{\mathrm{Hom}(\sigma,\pi)}(g) = \chi_{\mathrm{Hom}_G(\sigma,\pi)}(g).$$

用Schur引理就显然了啊! 证毕.

2.1.3 推论

设 π 是 G 的表示, σ 是 G 的不可约表示. 则 σ 在 π 中的重数等于

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\pi(g)\overline{\chi_\sigma(g)}.$$

特别的, π 不可约当且仅当

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\pi(g)\overline{\chi_\pi(g)}=1.$$

2.2 正则表示: 初次见面, 请多多关照

考虑群代数 $\mathbb{C}[G]$ 和右正则作用. 我们记之为 $(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])$. 一个简单的观察是:

$$\chi_{\mathsf{R}}(g)=\begin{cases}|G|, & g=1\\ 0, & g\neq 1.\end{cases}$$

所以利用推论 2.1.3, 很容易得到以下结果.

2.2.1 推论

作为 G 的表示, 我们有

$$(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])\simeq\bigoplus_{(\pi,V)}(\dim V)(\pi,V),$$

其中 (π,V) 过遍 G 的所有不可约表示. 比较两边的维数我们有

$$\sum_{(\pi,V)}\chi_\pi(1)^2=\sum_{(\pi,V)}(\dim V)^2=|G|^2.$$

最后这个等式给出了不可约表示维数的重要限制.

2.3 共轭类和表示

我们记 $\mathrm{cf}(G)$ 为 G 上所有类函数组成的线性空间(维数当然等于共轭类的个数!). 在类函数空间上我们可以定义内积

$$\langle\chi,\psi\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\psi(g)}$$

我们的目标是证明下面这个定理.

2.3.1 定理

集合

$$\{\chi_\pi \mid \pi \text{ 是 } G \text{ 的不可约表示}\}$$

是 $\mathrm{cf}(G)$ 的一组标准正交基.

证明: 前面的讨论已经说明 χ_π 相互正交, 我们只需要说明所有的类函数都是特征标的线性组合, 也就是说如果对所有的不可约表示 π 都有 $\langle f, \chi_\pi \rangle = 0$, 那么 $f = 0$.

现在假设 f 是这样的函数. 对于任意的表示 (ρ, V) 我们考虑

$$\rho_f = \sum_{g \in G} f(g)\rho(g) : V \to V.$$

由于 f 是类函数, 我们有 $\rho_f \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$, 它的迹等于 $|G|\langle f, \chi_{\rho^\vee} \rangle$. 于是 $\rho_f = 0$.

另一方面, 令 $\rho = \mathsf{R}$ 为右正则表示, 那么 $\mathsf{R}_f[g] = \sum_{h \in G} f(gh)[g]$. 由于 $\mathsf{R}_f = 0$, 我们得到 $f = 0$. 证毕.

2.4 特征标表

设 $C_1, \cdots, C_n$ 是 G 上所有的共轭类, $\chi_1, \cdots, \chi_n$ 是 G所有不可约表示的特征标, 一个 $n \times n$ 数表, 其中 i 行 j 列等于$\chi_i(C_j)$, 被称为G 的特征标表.

表中的行满足正交关系

$$\sum_{j=1}^{n} |C_j| \chi_i(C_j) \overline{\chi_{i'}(C_j)} = \delta_{i,i'} |G|.$$

由此可以得到列也满足正交关系

$$\sum_{j=1}^{n} |\chi_i|(C_j) \overline{\chi_i(C_{j'})} = \delta_{j,j'} \frac{|G|}{|C_j|}.$$

(想想怎么从行的正交关系变变形得到哦!)

由此我们可以算出很多群的特征标表.

2.4.1 例子

麻烦大家上网搜搜特征标表, 研究一下这些群的特征标表是怎么算出来的: S_3, S_4, A_4, A_5, D_n. 大体步骤如下: (1) 先分析共轭类 (2) 再写下一些显而易见的表示(一维的两维的等等) (3)用正交关系和维数关系把表算出来. 这个算会了特征标的基本理论就差不多懂了.

这就不操作给大家看了, TeX打起来太麻烦了, 我懒.

2.5 正则表示: 重出江湖, 一统天下

这一次我们重新考虑正则表示. 我们将 $\mathbb{C}[G]$ 视为 G 上的函数空间, 同时我们考虑 $G \times G$在 $\mathbb{C}[G]$ 上的左右正则作用:

$$f \mapsto \rho(g_1, g_2) f = (x \mapsto f(g_1^{-1} x g_2)), \quad g_1, g_2 \in G, \ f \in \mathbb{C}[G].$$

我们在这里引入矩阵系数的概念. 设 π 一个 G 的表示, π 的一个矩阵系数是 G 上的函数

$$f(g) = \langle \pi(g)v, v^\vee \rangle, \quad v \in \pi, v^\vee \in \pi^\vee.$$

这样我们就定义了 $G \times G$ 表示的同态: $\pi \otimes \pi^\vee \to \mathbb{C}[G]$.

2.5.1 引理

设 π 和 σ 是 G 的不可约表示, $v \in \pi$, $v^\vee \in \pi^\vee$, $w \in \sigma$, $w^\vee \in \sigma^\vee$. 那么

$$\sum_{g\in G}\langle \pi(g)v, v^\vee\rangle\langle w, \sigma^\vee(g)w^\vee\rangle = \begin{cases} 0, & \pi \not\simeq \sigma; \\ (\dim\pi)^{-1}\langle v, w^\vee\rangle\langle w, v^\vee\rangle, & \pi \simeq \sigma. \end{cases}$$

特别的, 不同表示的矩阵系数是线性独立的.

证明: 给定 $v \in \pi$, $w^\vee \in \sigma^\vee$, 我们定义 $T : \pi^\vee \to \sigma^\vee$,

$$T(v^\vee) = \sum_{g\in G}\langle \pi(g)v, v^\vee\rangle \sigma^\vee(g)w^\vee.$$

容易看出 $T \in \mathrm{Hom}_G(V^\vee, W^\vee)$. 所以如果 $\pi \not\simeq \sigma$, 那么等式左边自动等于零. 如果 $\pi \simeq \sigma$, 那么 T 是一个常数. 为了确定这个常数我们只需要算 T 的迹. 大家来算算吧. 证毕.

有了这个铺路的引理, 我们很容易证明下面的定理.

2.5.2 定理

我们有 $G \times G$ 表示的典范同构

$$\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_\pi \pi \otimes \pi^\vee.$$

证明: 用矩阵系数我们得到同态

$$\bigoplus_\pi \pi \otimes \pi^\vee \to \mathbb{C}[G].$$

引理 2.5.1告诉我们这是单射. 数数维数告诉我们这是满射. 证毕.

大家想想, 反过来的同态怎么构造?

3 紧群的Peter–Weyl定理

我们在这一节讨论紧群的Peter–Weyl定理. 抽象紧群本质上就这么一个定理啦.

3.1 拓扑群的表示

所谓的一个拓扑群 G, 是说 G 是一个群, 也是一个拓扑空间, 且群运算是连续映射. 常见的群都是拓扑群, 比方说, $\mathbb{R}$(加法群), $\mathbb{R}^\times$(乘法群), S^1(圆圈), $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{U}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n,R)$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ (还有把$\mathbb{R}$ 换成 $\mathbb{C}$ 得到的那些群).

我们只讨论 G 的酉表示. 酉表示的意思是说 G 在Hilbert空间 $(V, \langle -,-\rangle)$上的作用, 满足每一个 $g \in G$ 都是酉算子, 且从 G 映到 V 上算子构成的空间是连续的. (大家最好复习一下算子空间上的拓扑是怎么给的.) 所谓的不可约表示, 是说 V 不包含酉子表示. 由于表示空间 V是Hilbert空间, 我们考虑的表示总是完全可约的(选择公理在线), 即 V 是不可约酉子表示的完备直和.

为了避免一些拓扑学上诡异的现象发生, 我们总假定群作为拓扑空间的性质是好的, 比方说是个光滑流形, 群运算都是流形上的光滑映射(这样的群叫做李群, 这是最常见最重要的情况, 我们完全可以之讨论李群的情况), 或者至少满足足够好的可数性和分离性公理. 具体假设我们不作详细讨论.

我们这一节总假设 G 是紧群. 这些群上都有一个(左右均)不变测度, 叫做Haar测度.有限群上取平均的操作 $|G|^{-1}\sum_{g\in G}$ 在紧群的情况用积分 $\int_G \mathrm{d}g$ 代替(想想有限群上的 Haar测度是啥).这样有限群的结论几乎可以平行地搬到紧群上. 个别情况我们需要进一步使用一些泛函分析的基本结果,我们重点解释这些步骤,其他结论的平行搬运工作就留给大家来完成.

3.1.1 定理

设 (ρ, V) 是 G 的酉表示, 那么 V 包含有限维子表示. 特别的, G 的不可约酉表示都是有限维的.

证明: 首先任取一个有限维子空间 $W\subset V$, 令 $T_0: V\to W$ 是正交投影.考虑算子

$$T=\int_G \pi(g)\circ T_0\circ \pi(g^{-1})\mathrm{d}g.$$

则 T 是紧算子(有限秩算子的极限). 由于 T_0 是自伴随算子, 简单的换元可以看出 T 也是自伴随算子, 同时 T 与任意的 $\rho(g)$, $g\in G$ 交换.

现在说明 $T\neq 0$. 任给 $v\in V$, 我们有

$$\langle Tv, v\rangle=\int_G \langle T_0\pi(g^{-1})v, \pi(g^{-1})v\rangle \mathrm{d}g.$$

由于 T_0 是投影算子, 对于任意的 $w\in V$, 我们总有 $\langle Tw, w\rangle \geq 0$. 我们当然也可以找到某个 $v\in V$ 和某个 $g\in G$, 使得 $\langle T_0\pi(g^{-1})v, \pi(g^{-1})v\rangle>0$. 这样就证明了 $T\neq 0$.

根据紧算子的谱定理, T 有不等于零的特征值 λ 和特征空间 V_λ满足 $\dim V_\lambda<\infty$. 于是V_λ是有限维 G 表示. 证毕

以后我们说表示, 如果没有特别说明, 都是指有限维酉表示. 有限群表示的各种操作,比方说张量积, 对偶,等等都可以对紧群的表示谈. 注意, 如果表示是无限维的, 这些操作都是要考虑拓扑性质的. 谢天谢地, 我们只考虑有限维酉表示.

3.1.2 Schur引理

如果 V, W 都是不可约表示，那么

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W)=\begin{cases}1, & V\simeq W;\\ 0, & V\not\simeq W.\end{cases}$$

特别的, V 不可约当且仅当 $\mathrm{Hom}_G(V, V)$ 是一维的.

证明跟有限群的情况完全一样.

3.2 特征标

设 (π, V) 是 G 的表示, 我们定义 π 的特征标为 G 上的函数

$$\Theta_\pi(g) = \mathrm{Trace}(\pi(g)).$$

记号跟有限群不太一样. 我们在这里采用的记号跟Harish-Chandra理论的记号是一致的.

有限群特征标的性质很多紧群上都有, 比方说我们在第二节最开始谈到的那些结论都对.大家试着写写看?

我们也有正交关系.

3.2.1 定理

假设 π, σ 是 G 的不可约表示, 那么

$$\int_G \Theta_\pi(g)\overline{\Theta_\sigma(g)}\mathrm{d}g = \delta_{\pi,\sigma}\int_G \mathrm{d}g.$$

证明跟有限群的情况完全一样.

3.3 矩阵系数

类似于有限群的情况, 我们也有关于矩阵系数的讨论. 特别的, 我们有这样的结果.

3.3.1 引理

设 π 和 σ 是 G 的不可约表示, $v \in \pi$, $v^\vee \in \pi^\vee$, $w \in \sigma$, $w^\vee \in \sigma^\vee$. 如果 $\mathrm{d}g$ 是满足 $\int_G \mathrm{d}g = 1$ 的 Haar测度, 那么

$$\int_G \langle \pi(g)v, v^\vee\rangle\langle w, \sigma^\vee(g)w^\vee\rangle \mathrm{d}g = \begin{cases} 0, & \pi \not\simeq \sigma; \\ (\dim \pi)^{-1}\langle v, w^\vee\rangle\langle w, v^\vee\rangle, & \pi \simeq \sigma. \end{cases}$$

特别的, 不同表示的矩阵系数都是线性独立的.

证明跟有限群的情况完全一样.

我们考虑 G 上的连续函数空间 $C(G)$ 和平方可积函数空间 $L^2(G)$, 分别赋予之一致范数和 L^2 范数. 群 G 左右正则作用在 $C(G)$ 和 $L^2(G)$ 上. 我们为什么一定要研究正则表示? 首先, 它包含了所有的不可约表示; 其次, 你具体写个别的表示下来给我看看? 紧群的Peter–Weyl定理研究平方可积函数空间 $L^2(G)$ 在 $G \times G$ 左右正则表示下的分解. 我们先看一个简单的结论. 初看上去可能有些让人迷惑, 但究其根本, 终究只是定义的同义反复而已. 毛主席教导我们: 看似复杂的定理都是纸老虎. 说的就是这么个事情.

3.3.2 引理

设 V 是 $C(G)$ 中有限维 G 不变子空间, 那么 V 中的元素能写成 G 上不可约表示矩阵系数的有限和.

证明: 由于 V 是有限维的, 它一定是有限维不可约表示的直和. 所以我们只用考虑V 自己就是不可约表示的情况. 由于 V 是 $C(G)$ 的子空间, V 上有线性函数$\ell : V \to \mathbb{C}$, $\ell(f) = f(1)$. 给定 $f \in V$, 我们有

$$f(g) = \mathsf{R}(g)f(1) = \langle \mathsf{R}(g)f, \ell \rangle.$$

证毕.

3.4 Peter–Weyl定理: 正则表示的幽灵不散

3.4.1 定理

有典范 $G \times G$ 表示同构

$$L^2(G) = \widehat{\bigoplus_{\pi}} \pi \otimes \pi^{\vee},$$

其中 π 过遍 G 所有的不可约表示.

证明: 如同有限群的情况, 矩阵系数给出了单射

$$\bigoplus_{\pi} \pi \otimes \pi^{\vee} \to L^2(G).$$

我们的任务是证明所有矩阵系数生成的空间 Δ 在 $L^2(G)$ 中是稠密的(杯具!没有维数可以比较了!), 也就是说平方可积函数能够给矩阵系数平方平均逼近(哈, 想到Fourier分析的什么定理没有?). 事实上, 我们有比这个更强的结果. 注意到 Δ是 $C(G)$ 的子空间, 我们有 Δ 在 $C(G)$ 中稠密, 也就是说连续函数可以被矩阵系数一致逼近(哈, 还是Fourier分析里的定理Stone–Weierstrass 定理). 给定 $f \in C(G)$, 我们现在证明矩阵系数能一致逼近之. 给定 $\epsilon > 0$. 证明分几步.

第一步, 找一个 $1 \in G$ 的小邻域 U, 满足 $U^{-1} = U$, 且对于所有的 $g, h \in G$ 满足$gh^{-1} \in U$ 有 $|f(g) - f(h)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. 再取一个实值连续函数 $\varphi \in C(G)$, 使得 $\operatorname{supp}\varphi \subset U$, $\varphi(g) = \varphi(g^{-1})$, $\int_G \varphi(g)\mathrm{d}g = 1$ (想想看这个函数怎么得到? 你可以假设群是个微分流形回避一些点集拓扑学). 定义左乘卷积算子$T_\varphi : L^2(G) \to C(G)$,

$$T_\varphi f(g) = \int_G \varphi(x) f(x^{-1}g)\mathrm{d}x.$$

显然这不是零算子. 我们 φ 取法的要点是, 对于任意的 $g \in G$, 我们总有

$$|T_\varphi f(g) - f(g)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

第二步, 用Arzela–Ascoli定理可以证明 T_φ 是一个自伴随紧算子(这里伴随算子的定义由 L^2 内积给出). 所以利用自伴随算子的谱定理我们有

$$V = V_0 \bigoplus \bigoplus_i V_{\lambda_i}$$

在 $L^2(G)$ 中稠密, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 是 T_φ 的所有非零特征值, V_{λ_i} 是(有限维)特征子空间 (注意到 $V_{\lambda_i} \subset C(G)$), $V_0 = \operatorname{Ker} T_\varphi$.所以$f$是$f_j \in V$, $j = 1, 2, \cdots$ 的 L^2 极限. 由于紧算子是全连续算子(对于当前这个问题这两个条件等价),我们知道 $T_\varphi f$ 是 $T_\varphi f_j$ 的一致极限. 因为 $T_\varphi V_0 = 0$,

$T_\varphi V_{\lambda_i} = V_{\lambda_i}$, 我们得到 $T_\varphi f$是 $f'_j, j = 1, 2, \cdots$ 的一致极限,其中 $f'_j \in \oplus_i V_{\lambda_i}$. 所以存在 j_0 使得如果 $j > j_0$ 我们有

$$|T_\varphi f(g) - f'_j(g)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

对于任意的 $g \in G$ 都成立.

第三步, 费了这么半天劲终于可以收获劳动的果实了. 前面两步说明我们找到了一列函数 $f'_j \in \oplus_i V_{\lambda_i}$, 使得

$$|f(g) - f'_j(g)| \leq \epsilon$$

对于所有的 $j > j_0$ 和所有的 $g \in G$ 都成立. 我们只需要说明 f'_j 能写成矩阵系数的有限和就可以了. 这很容易. 因为 T_φ 与右正则表示交换(废话,T_φ 是用左正则表示做的卷积). 所以 V_{λ_i} 是右正则表示$C(G)$ 的有限维不变子空间. 于是根据引理 3.3.2, V_{λ_i} 里的元素都能写成矩阵系数的有限线性组合. 证毕.

3.5 小例子: 紧致二阶酉群

我们考虑群

$$G = \mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{C}, \ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

这是最简单的非交换紧群. 我们的目标是构造它所有的不可约表示.

首先 G 总用在二元多项式环 $\mathbb{C}[x, y]$ 上:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} x = ax + by, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} y = -\bar{b}x + \bar{a}y.$$

或者简单点就是说

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

一个肤浅的观察是这样的作用保持多项式的次数. 所以如果定义

$$V_n = \{n \text{ 次二元复系数多项式}\},$$

那么 V_n 是 G 的 $n+1$ 维表示. 我们记之为 (π_n, V_n).

3.5.1 引理

这些表示都是不可约表示.

大家可以自己想想怎么证明.

哇, 买群送表示的节奏, 免费得到了这么多表示.

现在我们计算 π_n 的特征标. 注意到, G 上的任何共轭类都包含对角线元素(怎么证明?). 所以我们只需要计算 Θ_{π_n} 在 $t_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ 上的值. 这个当然很好算, 因为

$$\pi_n(t_\theta) x^k y^{n-k} = e^{i(n-2k)\theta} x^k y^{n-k}.$$

于是

$$\Theta_{\pi_n}(t_\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{i(n-2k)\theta}.$$

利用这个计算很容易证明下面的定理.

3.5.2 定理

表示 $\pi_n, n = 0, 1, \cdots$, 穷尽了 G 所有的不可约表示.

证明: 我们考虑所有 $\Theta_{\pi_n}(t_\theta)$ (作为 θ 的函数)生成的线性空间 C. 这里我们都看成 S^1 上的函数, θ 是角参数. 简单计算我们就知道这其实是 $e^{in\theta} + e^{-in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ 生成的线性空间. 于是所有S^1 上的连续偶函数函数 f 都能被 C 中的函数一致逼近(Stone–Weierstrauss定理). 而 G 上的类函数在 t_θ 上的取值总是偶函数(想想为啥), 所以 G上的所有类函数都能被 C 中的函数一致逼近. 这样就做完了. 证毕.

4 诱导表示

这一节我们讨论Mackey关于诱导表示的理论. 这是深入研究表示论的基础. 特别的, 诱导表示给出了一种系统的方法从已知的小群的简单的表示, 构造大群的复杂表示的方法.

4.1 诱导表示和Frobenius互反律

先讨论一般的结果. 设 G 是群, H 是子群, (σ, W) 是 H 的表示. 所谓的诱导表示,之的是空间

$$V = \{f : G \to W \mid f(hg) = \sigma(h)f(g)\},$$

群 G 右正则作用在 V 上. 这样的诱导表示一般记为 $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ 或者简单点 $\mathrm{Ind}\,\sigma$ (你也许会看到 ind).

这样的讨论当然太一般了, 基本我们什么不平凡的话都说不了. 不过我们注意到, 如果$H = \{1\}$, σ 是平凡表示, 那么 $\mathrm{Ind}\,\sigma$ 就是 G 的右正则表示.所以好像还是有点不那么平凡的东西.

我们还是讨论有限群的情况. 从现在开始, 所有的群, 只要不加说明都是有限的. 先举个例子, $G = S_3$, $H = A_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. 取 H 的不平凡特征 χ, 那么$\mathrm{Ind}\,\chi$ 是 G 唯一的两维不可约表示. (想想看, 有两个不同的不平凡特征χ, 另外一个 χ 怎么样?)

我们可以换一种方式理解诱导表示. 先取一组代表元 $G = Hg_1 \cup \cdots \cup Hg_r$. 诱导表示的空间是 $V = \oplus_i W_i$, 每一个 W_i 均同构于 W, 且 H通过表示 σ 作用于每一个 W_i 上. 对于任意的 $g \in G$, 它在第 i 个分量上的作用是这样给出. 首先取g_j, 使得 $g_i g g_j^{-1} = h \in H$. 那么 $w \in W_i$ 在 g 作用之下的像落在W_j中, 且等于 $\sigma(h)w$. 咦? 这个描述问什么跟代表元选法无关? 自己动手算算呗. 正确就是任性.

4.1.1 引理

设 σ 是 H 的表示, 特征标为 χ_σ. 令 $\pi = \operatorname{Ind}\sigma$. 那么

$$\chi_\pi(g) = \sum_{\substack{1\le i\le r\\ g_igg_i^{-1}\in H}} = \frac{1}{|H|}\sum_{\substack{x\in G\\ xgx^{-1}\in H}} \chi_\sigma(xgx^{-1}).$$

特别的, $\dim\operatorname{Ind}\sigma = [G:H]\dim\sigma$.

证明: 利用上面的描述直接按照定义算就好.

关于诱导表示最重要最基本的结果是Frobenius互反律. 设 π 是 G 的表示, 那么自动可以看成子群 H 的表示, 我们记这个表示为 $\pi|_H$, 在不引起混淆的情况下往往就直接写成 π.

4.1.2 定理

设 π 是 G 的表示, σ 是 H 的表示. 那么

$$\dim\operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}\sigma,\pi) = \dim\operatorname{Hom}_H(\sigma,\pi|_H).$$

证明: 直接带入特征标公式计算.

4.1.3 注记

事实上我们可以构造典范同构

$$\operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}\sigma,\pi)\simeq\operatorname{Hom}_H(\sigma,\pi|_H).$$

这说明 Ind 与 $|_H$ 是伴随函子.

4.2 Mackey理论

设 G 是有限群, H_1 和 H_2 是 G 的子群, σ_1,σ_2 分别是H_1 和 H_2 的不可约表示. 现在问

$$\operatorname{Hom}_G\left(\operatorname{Ind}_{H_1}^G\sigma_1,\operatorname{Ind}_{H_2}^G\sigma_2\right) = ?$$

根据Frobenius互反律, 这个问题等价于问 $(\operatorname{Ind}_{H_2}^G\sigma_2)|_{H_1}$ 的分解. 我们的伟大前辈Mackey给出了完美的答案.

为了陈述定理我们引入如下定义. 设 $g\in G$, 我们定义 gH_2g^{-1} 的表示 $(\sigma_2)^g$ 为 $(\sigma_2)^g(h) = \sigma_2(g^{-1}hg)$ (同一个表示空间), $h\in H_2$.

4.2.1 定理

取 G 的双陪集分解 $G = H_1g_1H_2\cup\cdots\cup H_1g_rH_2$. 我们有 H_1 表示的同构

$$\left(\operatorname{Ind}_{H_2}^G\sigma_2\right)|_{H_1}\simeq\bigoplus_{i=1}^r\operatorname{Ind}_{H_1\cap g_iH_2g_i^{-1}}^{H_1}(\sigma_2)^{g_i}.$$

证明: 大家如果觉得这个证明不好理解的话先假设 σ_2 是平凡表示或者是一维表示(事实上我们也就只用到这一种情况).

这个定理可能最要紧的地方在于理解为什么表示的分解跟双陪集分解有关. 我们注意到表示空间 $\mathrm{Ind}_{H_2}^G \sigma_2$ 的元素是函数 $f: G \to \sigma_2$, 他们在H_2左平移下满足一些条件. 所以(这是最重要的观察!), 下面的这个空间

$$I_i = \{f \in \mathrm{Ind}_{H_2}^G \sigma_2 \mid \mathrm{supp}\, f \subset H_2 g_i H_1\}$$

是 H_2 不变子空间. 做到这我们就完成一半了. 接下来的事情是就是证明作为 H_1 的表示有同构

$$I_i \simeq \mathrm{Ind}_{H_1 \cap g_i H_2 g_i^{-1}}^{H_1} (\sigma_2)^{g_i}.$$

这时候我们又想想, I_i 的元素是一些 G 上的函数, 右边那个空间里是一些 H_1 上的函数(这里要观察到两边函数的值域是一样的). 怎么才能得到一个典范的同态? 很简单啊, G 上的函数限制在 H_1 上就好了啊. 于是我们定义

$$I_i \to \mathrm{Ind}_{H_1 \cap g_i H_2 g_i^{-1}}^{H_1} (\sigma_2)^{g_i}, \quad f \mapsto f|_{H_1}.$$

根据条件直接验证 $f|_{H_1}$ 确实落在右边那个空间里, 这个映射也确实是表示的同态. 然后单射是容易验证的, 在数数维数就看出这也是满射. 证毕.

我们再强调一次, 这个证明反应了研究诱导表示最重要的方法之一(双陪集分解), 值得大家好好把玩. 今后大家还会遇到很多表示论的研究本质上都是这样的方法. 比方说对典型群退化主序列表示合成列的研究就采用了我们定理证明中所描述的方法, 这个合成列在所谓的Siegel–Weil公式(及其各种各样的变种)的证明中很重要.

4.3 Artin和Brauer关于诱导表示的定理

这里我们陈述Artin和Brauer关于诱导表示的两个重要结果, 其中Brauer定理在数论中有重要的应用. 我们只陈述定理不证明. 这两个证明对我们来说都太复杂了, 而且不怎么帮助我们理解进一步的内容. 大家想知道证明的话可以参考Serre的有限群表示论.

Artin定理是说, 每个 G 的特征标都是一些简单的诱导特征标的有理系数线性组合.为了简化一些记号, 我们约定如果 H 是子群, σ 是 H 的表示, χ 是其的特征标, 那么我们记 χ_H^G 为 $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ 的特征标.

4.3.1 定理

假设 π 是 G 的表示, 那么对每一个 G 的循环子群 C, 存在 $a_C \in \mathbb{Q}$,使得

$$\chi_\pi = \sum_C a_C \, \mathbf{1}_C^G,$$

其中 C 跑遍所有的 G 的所有循环子群, $\mathbf{1}$ 是 C 的平凡表示.

这些系数 a_C 能具体的算出来. 大家可以去查相关的材料.

Brauer定理是说, 如果我们略微放宽子群的条件, 那么我们可以做到整系数线性组合.为此我们定义所谓的 G 的初等子群 H, 是指 $H = C \times P$, 其中 P 是 p-群(意思是 $|P| = p^r$, p 是素数), C 是循环群, 且 $p \nmid |C|$.大家可能会问, 为什么初等子群是好的, 或者说简单的. 循环群自然不用说, p-群在群论中被认为是简单的, 主要来自于这样的事实: p-群的中心一定是非平凡的(想想怎么证明?数数共轭类的元素个数试试). 于是我们用归纳法可以证明 p-群一定是可解群.

现在我们陈述Brauer的定理.

4.3.2 定理

群 G 的特征标都是初等子群一次特征标的整系数线性组合.

另外要注意, 这里的系数不见得都能取到正整数. 这点很关键! 你要是能证明取到正整数(这个命题当然是不对的!), 你就证明了Artin L-函数都是全纯的!

5 有限域上的二阶矩阵群

我们讨论 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的表示, 这里我们假设 $2 \nmid q$. 主要的目标: 通过Weil表示构造 G 的所有不可约表示. 这一节是一个长例子, 会用到前面学过的几乎所有有限群表示知识. 我们建议大家在学习的时候能够尽量多地自己动手算. 所以这一节我们留给大家的练习机会也会更多一些.

5.1 群的结构

我们还是先来熟悉一下 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的结构. 由于表示和共轭类是相互决定的(这种观点和意识很重要!), 我们先来算算 G 上所有的共轭类. 具体的计算用Jordan标准型就可以搞定.另外由于群GL_2的特殊性, 两个元素在$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 上共轭当且仅当它们在$\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_q})$ 上共轭 (为什么?) 另外我们有 $|G| = (q^2-1)(q^2-q)$.

我们就直接写下每个共轭类的代表元(请大家自己检验). 我们固定一个 $\tau \in \mathbb{F}_q^\times \backslash (\mathbb{F}_q^\times)^2$, 这样 $\mathbb{F}_{q^2} = \mathbb{F}_q[\sqrt{\tau}]$.

1. 中心: $\begin{pmatrix} x & \\ & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{F}_q^\times$, 一共 $q-1$ 个共轭类. 每个共轭类有都只有一个元素.
2. 正则幺幂: $\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{F}_q$, $x \neq 0$, 一共有 $q-1$ 个共轭类. 每个共轭类有 q^2-1 个元素.
3. 正则抛物半单: $\begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{F}_q^\times$, $x \neq y$, 一共有 $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ 个元素. 每个共轭类有 q^2+q 个元素.
4. 正则椭圆半单: $\begin{pmatrix} x & y \\ \tau y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{F}_q$, $x^2 - \tau y^2 \neq 0$, $y \neq 0$, 一共有 $\frac{1}{2}(q^2-q)$ 个元素. 每个共轭类有 q^2-q 个元素.

加起来发现元素个数正好合适, 于是我们算对了! 爽!

现在我们再来定义一些 G 的子群. 你当然会问, 为什么这些子群是重要的, 需要单独提出来说. 我只能说这些子群都来自代数群上最自然的那些闭子群, 比方说Borel子群(抛物子群), 环面子群等等(没听懂不是, 但没关系). 大家如果没有什么感觉就先接受现实, 这些子群就是重要的, 以后会在不同的场合反复邂逅它们.

定义Borel子群 B 和它的幺幂根 $N \simeq \mathbb{F}_q$,

$$B = \begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & * \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

另外两个环面子群: 分裂环面 $T_s \simeq (\mathbb{F}_q^\times)^2$ 和不分裂环面 $T_a \simeq \mathbb{F}_{q^2}^\times$,

$$T_s = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}, \quad T_a = \begin{pmatrix} x & y \\ \tau y & x \end{pmatrix}, \ x, y \in \mathbb{F}_q, \ x^2 - \tau y^2 \neq 0.$$

另外 G 的中心 $Z \simeq \mathbb{F}_q^\times$. 好了, 现在你要想想, 假设我们换一个 τ 会发生什么情况?

对于群 G, 我们有重要的分解(请大家自己验证)

$$G = B \coprod BwB.$$

是谓之Bruhat分解. 这是代数群理论里最重要最基本的结果之一.

我们还会碰到另外一个密切相关的群

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \mid \det g = 1\}.$$

关于这个群我们需要知道它的表现(生成元和关系). 令

$$t(x) = \begin{pmatrix} x & \\ & x^{-1} \end{pmatrix}, \quad n(y) = \begin{pmatrix} 1 & y \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix},$$

这里 $x, y \in \mathbb{F}_q^\times$, w 叫做 SL_2 或者 GL_2 的Weyl元. 这些元素生成 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$. 他们之间满足关系

$$t(x)t(y) = t(xy), \quad n(x)n(y) = n(x+y), \quad t(x)n(y)t(x)^{-1} = n(x^2 y),$$

以及

$$wt(x)w^{-1} = t(x^{-1}), \quad wn(z)w^{-1} = t(z^{-1})n(-z)wn(-z^{-1}), \ (z \neq 0).$$

至于为什么是这样的表现, 你猜?(这个不重要, 承认这个事实就可以了)

5.2 Weil表示

我们现在来定义一个神奇的表示. 这个表示包含了所有 G 的表示. 在这个意义下它有点像正则表示, 但它比正则表示小, 比正则表示简单且好研究. 我们这把这个表示叫做Weil表示, 你可能能看到别的名称包括 Oscillator representation, Segal–Shale–Weil representation等等. 注意,

这里的材料是一门叫做 θ-提升或者 θ-对应的学问的最简单最初步的情况. 这门学问博大精深, 现在还有很多人在研究它.

首先我们要固定一个非平凡加法特征 $\psi: \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$ (你知道怎么固定吗?). 我们在取一个 $E = \mathbb{F}_{q^2}$ (不分裂的情况), 或者是 $E = \mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q$ (分裂的情况). 这样的 E 上有对合, 迹和范映射. 如果 $E = \mathbb{F}_{q^2}$, 那就是通常的Galois共轭, 迹和范映射.如果 E 分裂, 我们定义 $\mathrm{Tr}(x,y) = x+y$, $N(x,y) = xy$, $(x,y)^\sigma = (y,x)$, $x, y \in \mathbb{F}_q$. 通过这样的定义, E 是两维 $\mathbb{F}_q$ 内积空间: $\langle x, y\rangle = \mathrm{Tr}(\overline{x}y)$, $x, y \in E$.

对于我们记 $\mathcal{S}(E)$ 为 E 上的函数空间(这个怪怪的记号是为了与Weil表示的标准记号统一), $\phi \in \mathcal{S}(E)$. 我们定义一个 $\mathcal{S}(E)$ 上的Fourier变换: $\phi \mapsto \widehat{\phi}$,

$$\widehat{\phi}(x) = \epsilon q^{-1} \sum_{y \in E} \phi(y)\psi(\langle x, y\rangle)).$$

这里如果 E 分裂, 那么 $\epsilon = 1$; 如果 E 不分裂, 那么 $\epsilon = -1$. 一个简单的事实(这个不难, 大家自己算算啊), $\widehat{\widehat{\phi}}(x) = \phi(-x)$.

5.2.1 定理

存在唯一的表示 $\omega: \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{GL}(\mathcal{S}(E))$, 满足

$$\begin{aligned}
\omega(t(a))\phi(x) &= \phi(ax); \\
\omega(n(b))\phi(x) &= \psi(bNx)\phi(x); \\
\omega(w)\phi(x) &= \widehat{\phi}(x).
\end{aligned}$$

证明: 直接检验生成元关系(好吧, 我又想说这个不重要, 承认就好).

定理中的这个表示我们称之为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的Weil表示. 注意, 这个表示的定义依赖于加法特征标 ψ 的选择. 如果我们换一个特征标会发生什么? (你怕是先要弄清楚两个不同的加法特征标之间区别是什么.)

注意到 E 自身是一个环, 如果 E 分裂, 那么 $E^\times \simeq \mathbb{F}_q^\times \times \mathbb{F}_q^\times$. 如果 E 不分裂, 那么 $E^\times \simeq \mathbb{F}_{q^2}^\times$. 我们记 E^1 是 E 中范等于一的元素全体. 我们固定$E^\times$ 的特征 $\chi: E^\times \to \mathbb{C}^\times$ 使得 $\chi|_{E^1}$ 不平凡(这个等价于 χ 不能通过范映射分解). 考虑

$$\mathcal{S}(E)_\chi = \{\phi \in \mathcal{S}(E) \mid \phi(tx) = \chi(t)^{-1}\phi(x),\ t \in E^1, x \in E\}.$$

容易验证 $\mathcal{S}(E)_\chi$ 都是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ 不变子空间. 大家来算算维数. 我们有

$$\dim \mathcal{S}(E)_\chi = \begin{cases} q+1, & E \text{ 分裂}; \\ q-1, & E \text{ 不分裂}. \end{cases}$$

我们目标是研究 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的表示. 所以我们要想办法把这个表示拓展到 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 上去. 直接定义, 对于 $\phi \in \mathcal{S}(E)_\chi$, $b \in E^\times$, $a = Nb \in F^\times$,

$$\omega\left(\begin{pmatrix} a & \\ & 1 \end{pmatrix}\right)\phi(x) = \chi(b)\phi(bx).$$

想一想, 为什么这样的定义是合理的? 大家只需要想想要说明定义是合理的需要证明什么, 具体怎么证明不重要. 我们把这个 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的表示记为 ω_χ.

5.2.2 总结

我们固定一个非平凡加法特征 $\psi:\mathbb{F}_q\to\mathbb{C}^\times$. 对于 $E=\mathbb{F}_q\oplus\mathbb{F}_q$ 或者 $E=\mathbb{F}_{q^2}$, $\chi:E^\times\to\mathbb{C}^\times$ 满足 $\chi|_{E^1}$不平凡, 我们都定义了一个表示 ω_χ. 这个表示的要点在于, 它是用具体的函数空间写下来的,群作用也是具体写下来的, 所以研究起来并不复杂.

5.3 抛物诱导表示: 主序列表示

从现在开始, 我们记 $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. 我们先构造一种特殊的诱导表示: 抛物诱导表示.

首先回忆一下我们定义了Borel子群 $B=\left\{\begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix}\right\}$. 我们定义 B 上的特征(一维表示) $\chi=(\chi_1,\chi_2)$ 如下:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y \\ & x_2 \end{pmatrix}\mapsto \chi_1(x_1)\chi_2(x_2).$$

定义 $I(\chi_1,\chi_2)$ 是由此特征诱导到 G 上得到的表示. 具体来说, 空间

$$I(\chi_1,\chi_2)=\left\{f:G\to\mathbb{C}\;\middle|\; f\left(\begin{pmatrix} x_1 & y \\ & x_2 \end{pmatrix}g\right)=\chi_1(x_1)\chi_2(x_2)f(g)\right\},$$

群 G 右正则总用在 $I(\chi_1,\chi_2)$ 中的函数上. 不难看出

$$\dim I(\chi_1,\chi_2)=q+1.$$

我们现在研究 $I(\chi_1,\chi_2)$ 的可约性.

5.3.1 定理

假设 $\chi_1,\chi_2,\mu_1,\mu_2$ 是 $\mathbb{F}_q^\times$ 的特征. 我们有

$$\dim \mathrm{Hom}_G(I(\chi_1,\chi_2),I(\mu_1,\mu_2))=\delta_{\chi_1,\mu_1}\delta_{\chi_2,\mu_2}+\delta_{\chi_1,\mu_2}\delta_{\chi_2,\mu_1}.$$

证明: 这是定理 4.2.1的一个简单应用. 有Frobenius互反律, 我们只需要研究 $I(\mu_1,\mu_2)|_B$ 的分解. 由Bruhat分解, G 的 $B\times B$ 双陪集代表元有两个: 1, w. 注意到 $B\cap wBw^{-1}=T_s$. 记 $\mu=(\mu_1,\mu_2)$ 是 B 的特征, 那么 μ^w 做为 T_s 的特征是 $\mu'=(\mu_2,\mu_1)$. 用定理 4.2.1, 有

$$I(\mu_1,\mu_2)|_B=\mu\oplus \mathrm{Ind}_{T_s}^B\mu'.$$

再用Frobenius互反律有

$$\mathrm{Hom}_B(\chi,\mathrm{Ind}_{T_s}^B\mu')=\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Ind}_{T_s}^B\mu',\chi)=\mathrm{Hom}_{T_s}(\chi,\mu').$$

于是结论就很明显了. 证毕.

5.3.2 推论

1. $I(\chi_1,\chi_2)\simeq I(\mu_1,\mu_2)$ 当且仅当 $\chi_1=\mu_1$, $\chi_2=\mu_2$, 或者 $\chi_1=\mu_2$, $\chi_2=\mu_1$.

2. 如果 $\chi_1\neq\chi_2$, 那么 $I(\chi_1,\chi_2)$ 不可约.

3. $I(\chi,\chi)$ 分解成两个不可约表示, 其中一个是一维表示 $\chi\circ\det$, 另外一个记为 St_χ. 显然 $\mathrm{St}_\chi=\mathrm{St}_{\mathbf{1}}\otimes\chi$.

证明是显然的.

这里出现的 $\mathrm{St}=\mathrm{St}_{\mathbf{1}}$ 叫做Steinberg表示, 当然我们有 $\dim\mathrm{St}=q$.

现在我们在 E 分裂的情况下分析 $\mathcal{S}(E)_\chi$. 注意, 由我们的假设, $\chi=(\chi_1,\chi_2)$, $\chi_1\neq\chi_2$, 所以 $I(\chi_1,\chi_2)$ 是不可约的.

5.3.3 定理

我们有典范同构

$$\omega_{\chi_1,\chi_2}\simeq I(\chi_2,\chi_1),\quad \Phi\mapsto\omega(g)\Phi(1,0).$$

特别的, ω_{χ_1,χ_2} 不可约, 且 $\omega_{\chi_1,\chi_2}\simeq\omega_{\mu_1,\mu_2}$ 当且仅当 $\chi_1=\mu_1$, $\chi_2=\mu_2$, 或者 $\chi_1=\mu_2$, $\chi_2=\mu_1$.

证明: 容易验证 $\omega(g)\Phi(1,0)\in I(\chi_1,\chi_2)$. 显然这个映射不等于零. 又有 $I(\chi_2,\chi_1)$ 不可约, $\dim\omega_{\chi_1,\chi_2}=\dim I(\chi_2,\chi_1)=q+1$. 再用用Schur引理就搞定啦.

5.4 尖表示

我们称 G 的表示 π 为尖表示, 是说

$$\mathrm{Hom}_N(\pi,\mathbb{C})=0.$$

这是说不存在线性函数 $l:\pi\to\mathbb{C}$ 满足

$$l\left(\pi\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}v\right)=l(v)$$

对所有的 $v\in\pi$ 成立, 注意, 在这个特定的条件下(有限群), 这个条件与 π 没有 N 固定元素是等价的. 但是对于别的情况, 比方说 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 或者 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (如果你不知道这是什么就不管它), 这两个条件不等价.

5.4.1 定理

假设 π 是尖表示. 那么 $q-1\mid\dim\pi$.

证明: 首先作为群有同构 $N\simeq\mathbb{F}_q$. 在注意到 $\mathbb{F}_q$ 的特征都长这样: $x\mapsto\psi(ax)$, $a\in\mathbb{F}_q$ (想想为什么. 这个基本的事实很重要.) 现在考虑 N 在 $V^\vee$上的表示(对偶表示限制在 N 上). 既然 N 是交换的, 那么 $V^\vee$ 能分解成 N 的特征子空间的直和

$$V^\vee=\bigoplus_{a\in\mathbb{F}_q}V^\vee(a),$$

其中

$$V^\vee(a)=\left\{l\in V^\vee \,\middle|\, \pi^\vee\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}\right)l=\psi(ax)l\right\}.$$

假设条件 π 是尖表示等价于 $V^\vee(0)=0$. 如果 $a\neq 0$, 那么有同构

$$V^\vee(1)\to V^\vee(a),\quad l\mapsto \pi^\vee\left(\begin{pmatrix}a & \\ & 1\end{pmatrix}\right)l.$$

所以 $\dim V^\vee(a)=\dim V^\vee(1)$, $\dim V=\dim V^\vee=(q-1)\dim V^\vee(1)$. 证毕.

现在我们分析在 E 不分裂的条件下分析 $\mathcal{S}(E)_\chi$. 注意我们也有假设 $\chi|_{E^1}\neq 1$. 所以如果 $\Phi\in\mathcal{S}(E)_\chi$, 那么 $\Phi(0)=0$. 我们要注意, 这里及后面的论证我们本质地用到了这个表示具体的构造, 也就是说这个表示是实现在某个具体的函数空间上, 群作用也能具体的写下来. 这对我们分析问题的法宝.

5.4.2 定理

假设 E 不分裂, 那么 $\mathcal{S}(E)_\chi$ 都是 G 的不可约尖表示.

证明: 我们需要说明 $\mathcal{S}(E)_\chi$ 里没有 N 不变的元素(再次强调, 这个刻画只对有限群成立). 我们已经知道 $\Phi(0)=0$. 如果 $x\neq 0$, 那么找一个 $b\in\mathbb{F}_q$ 使得 $\psi(bNx)\neq 1$. 根据定义, 如果 $\Phi\in\mathcal{S}(E)_\chi$ 是 N 不变的, 那么

$$\Phi(x)=\pi_\chi\left(\begin{pmatrix}1 & b\\ & 1\end{pmatrix}\right)\Phi(x)=\psi(bNx)\Phi(x).$$

所以 $\Phi(x)=0$. 搞定.

因为 $\dim\mathcal{S}(E)_\chi=q-1$, 根据定理 5.4.1, 他们自动都是不可约的. 证毕.

最后我们需要分析哪些 ω_χ 是相互同构的. 为此我们需要更仔细的分析一下 $\mathcal{S}(E)_\chi$ 里的函数. 我们先构造这个空间的一组基. 如果 $a\in\mathbb{F}_q^\times$, 我们固定一个 $a'\in E^\times=\mathbb{F}_{q^2}^\times$ 满足 $Na'=a$. 我们令

$$\Phi_a(x)=\begin{cases}2, & x=a'\\ 0, & Nx\neq a.\end{cases}$$

注意, 由于 $\Phi\in\mathcal{S}(E)_\chi$, 利用 E^1 的作用, 我们就知道 Φ_a 在所有满足 $Nx=a$ 的元素 $x\in E$ 上的值. 显然这是 $\mathcal{S}(E)_\chi$ 的一组基. 我们这个基的构造地非常好, 使得对于任意的 $g\in G$, 我们总有

$$\operatorname{Trace}\omega_\chi(g)=\sum_{x\in\mathbb{F}_q^\times}(\omega_\chi(g)\Phi_a)(a').$$

利用Weil表示的公式, 我们可以直接算出(等一下解释怎么算)

$$\omega_\chi\left(\begin{pmatrix}t & \\ 1 & t\end{pmatrix}\right)\Phi_a(a')=\chi(t)^{-1}\psi(-ta).$$

于是

$$\omega_\chi\left(\begin{pmatrix} t & \\ 1 & t\end{pmatrix}\right) = \chi(t)^{-1}\sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times}\psi(-ta) = -\chi(t)^{-1}.$$

于是如果 $\omega_\chi \simeq \omega_\mu$, 那么 $\chi|_{\mathbb{F}_q^\times} = \mu|_{\mathbb{F}_q^\times}$. 所以不同构的 ω_χ 一共有 $\frac{1}{2}(q^2-q)$ 个.

现在来解释一下 $\omega_\chi\left(\begin{pmatrix} t & \\ 1 & t\end{pmatrix}\right)\Phi_a$ 怎么算. 这里主要(或者是唯一)的方法就是矩阵分解. 想法是: 我们就只知道 ω_χ 在那几个生成元上的作用效果, 那我们就把这个矩阵分解成那些生成元的乘积呗. 有了这样的信念剩下的就是带入Weil表示的公式做初等的计算了. 我们有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} t & \\ 1 & t\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t^2 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-1} & \\ 1 & t\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} t^2 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -t^{-1} \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

第一次看不出来这个分解没关系, 多算几次就熟练了. 这种 2×2 矩阵的分解在表示论中很常见. 古人的话是说"无他, 唯手熟尔", 现在人的话是说"常规操作". 仅此而已.

5.5 结论

对于群 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, 我们有如下的表示:

1. $\pi = \chi\circ\det$, 共有 $q-1$ 个.

2. $\pi = \mathrm{St}_\chi$, 共有 $q-1$ 个.

3. $\pi = \omega_\chi$, $E = \mathbb{F}_q\oplus\mathbb{F}_q$ 分裂, $\chi = (\chi_1,\chi_2)$, $\chi_1\neq\chi_2$, 共有 $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ 个.

4. $\pi = \omega_\chi$, $E = \mathbb{F}_{q^2}$ 不分裂, $\chi : \mathbb{F}_{q^2}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $\chi|_{E^1}\neq 0$, 共有 $\frac{1}{2}(q^2-q)$ 个.

数一下表示的个数, 再数一下共轭类的个数, 发现刚好合适. 所以我们构造出了所有的不可约表示! 爽!

等等, 再仔细对比一下? 咦, 我好像又发现了点什么. 不只是数量加起来一样那么简单诶. 四种共轭类, 四种表示, 每一种的个数都是一样的. 咋回事? (你猜? 这个其实很深刻, 我们就不讨论了).

另外, 我们似乎还有一个观察, 每一个表示都是通过一个环面子群的特征构造出来的. 所以似乎有

$$\{(T,\theta)\mid T\text{ 是环面子群, }\theta\text{ 是 }T\text{ 的特征}\}\leftrightarrow\{\text{所有的表示}\}.$$

这个也很深刻呢! 请参考 Deligne-Lusztig: *Reductive groups over finite fields*, Ann. Math. 1976. 最近的工作可以参考 Kaletha: *Regular supercuspidal representations*, Ann. Math. To appear.

你看, 一个小小的群能引出这么多深刻的数学, 惊喜不惊喜, 意外不意外?

6 一些相对复杂的材料

我们会布置一些常规的练习题供大家练手. 以下是一些内容较复杂的材料. 材料的难度不稳定, 有些难有些简单, 具体难度全靠猜. 大家做不完没关系, 拿回家接着慢慢想, 有些材料深入想下去是一些很有意义的没有解决的问题.

6.1 李型群表示的特征标

1. 你能不能写下 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的特征标表?

2. 你能不能写下 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ Weil表示的特征标?

6.2 限制问题

1. 考虑 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的不可约表示 π. 求 $\pi|_{T_s}$ 和$\pi|_{T_a}$ 的分解. 你能发现什么?

2. 考虑 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的不可约表示 π_1, π_2, π_3. 什么情况下在 $\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3$ 上存在 G 不变三线性形式? 如果有, 有几个?

3. 对比第二问, 对于 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^2}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 或者 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^3})$ 你准备怎么提这个问题? 你提的问题你会做吗?

6.3 Whittaker模型

固定加法特征 $\psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$. 设 π 是 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的一个不可约表示. 所谓 π 上的一个Whittaker模型(或者叫Whittaker泛函),是指 π 上的一个线性形式 $\ell : \pi \to \mathbb{C}$, 满足条件

$$\ell\left(\pi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}\right) v\right) = \psi(x)\ell(v).$$

1. 哪些不可约表示有Whittaker模型? (只要维数不是一都有!)

2. 证明如果 π 上存在Whittaker模型, 那么在相差一个常数的意义下这个模型是唯一的.

这里第二问强行硬刚正面可能有比较大的困难(虽然也未必不可行), 我们可以采用这样的证明路线. 考虑 G 的子群

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{F}_q \right\},$$

和 N 的一维表示 $\psi_N\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}\right) = \psi(x)$. 令 $\mathcal{W} = \mathrm{Ind}_N^G \psi_N$. 首先证明Whittaker模型的唯一性等价于 $\mathcal{W}$ 分解成不可约表示是重数一的. 再证明(用Schur引理)一个表示是重数一的当且仅当它的自同态代数是交换的. 这样问题的转化成证明 $\mathrm{End}_G(\mathcal{W})$ 是交换的. 这个交换性可以使用Gelfand对合方法验证.

6.4 新谷提升

考虑 $G_1 = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, $G_n = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^n})$. 令 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)$ 为Frobenius元. 群 G_n 上自动有Frobenius的作用.

1. 如果存在 $h \in G_n$ 使得 $g_1 = h^{-1}g_2h^{\sigma}$, 那么我们说$g_1, g_2 \in G_n$ 是扭曲共轭的(twisted conjugate). 我们定义 G_n 上的范数映射 $N : G_n \to G_n$, $g \mapsto Ng = g \mapsto gg^{\sigma}\cdots g^{\sigma^{n-1}}$.证明 Ng 通过 G_n 的元素与某个 G_1 中的元素共轭.我们把这个元素在 G_1 中的共轭等价类记为 $N(g)$. 证明 $g \mapsto N(g)$ 给出了 G_n 上扭曲共轭类到 G_1 上共轭类的一一对应.

2. 对于 G_n 的一个表示 (Π, V), 我们定义它的 σ-扭曲Π^{σ} 为 $\Pi^{\sigma}(g) = \Pi(g^{\sigma})$ (同一个表示空间 V). 如果 $\Pi^{\sigma} \simeq \Pi$, 那么我们说 Π 是 σ-稳定的. 假设Π 是 σ-稳定的且维数大于一. 证明存在唯一的同构 $I_{\sigma} : (\Pi^{\sigma}, V) \simeq (\Pi, V)$, 使得 $I_{\sigma}^{\vee}\ell = \ell$. 这里我们固定非平凡加法特征 $\psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^{\times}$, ℓ 是 Π 上由加法特征 $\psi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}$ 定义的Whittaker模型, $I_{\sigma}^{\vee} : ((\Pi^{\sigma})^{\vee}, V^{\vee}) \simeq (\Pi^{\vee}, V^{\vee})$ 是 I_{σ} 的对偶映射.

3. 证明对于 G_1 的任意不可约表示 π, 存在 G_n 的 σ-稳定表示 Π, 使得对于所有的 $g \in G_n$ 都成立
$$\mathrm{Trace}(\pi(N(g))) = \mathrm{Trace}(\Pi(g)I_{\sigma}).$$

从这个问题中你能受到什么启发?

6.5 张量积

考虑 $G = \mathrm{SU}(2)$.

1. 取 G 的不可约表示 π_1, π_2, π_3. 什么情况下$\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3$ 上存在 G 不变三线性形式?

2. 取 G 的不可约表示 $\pi_1, \cdots, \pi_n$. 怎么将 $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n$ 分解成 G 不可约表示的直和? 这个问题和第一个问题有什么联系?

6.6 共轭问题

考虑有限群 G 的两个表示: $\rho_1, \rho_2 : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. 我们说$\rho_1$ 和 ρ_2 是局部共轭的, 如果对于每个 $g \in G$ 我们都能找到 $h \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (取决于 g), 使得 $\rho_1(g) = h^{-1}\rho_2(g)h$. 我们说$\rho_1$ 和ρ_2 是整体共轭的, 如果我们都能找到 $h \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 使得对于每个 $g \in G$, 我们都有$\rho_1(g) = h^{-1}\rho_2(g)h$. 证明 ρ_1 和ρ_2 局部共轭当且仅当整体共轭.

把 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 换成别的群, 比方说 $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$, 结论还成立吗?(废话, 当然不一定成立了, 成立的话上一问就让你证明这个了) 注意: 群的连通性是重要的, 否则很简单就能举出反例.

6.7 紧群上的调和分析

设 G 是紧群, $g \in G$, $f \in C(G)$. 我们定义 f 的轨道积分

$$O(g, f) = \int_G f(x^{-1}gx)\mathrm{d}x.$$

如果 (π, V) 是 G 的不可约表示, 那么 $C(G)$ 在 V 上的作用由下式给出

$$\pi(f)v = \int_G f(g)\pi(g)v\mathrm{d}g, \quad f \in C(G),\ v \in V.$$

我们记 $\Theta_\pi(f) = \operatorname{Trace} \pi(f)$.

1. 设 $f_1, f_2 \in C(G)$. 证明局部迹公式

$$\int_G O(g, f_1)O(g, f_2)\mathrm{d}g = \sum_\pi \Theta_\pi(f_1)\Theta_\pi(f_2),$$

其中 π 跑遍 G 所有的不可约表示.

2. 证明紧群的Plancherel公式:

$$f(1) = \sum_\pi (\dim \pi)\Theta_\pi(f),$$

其中 π 跑遍 G 所有的不可约表示.

3. 设 π 是 G 的不可约表示, f 是任意一个矩阵系数, 证明

$$O(g, f) = (\dim \pi)^{-1} f(1) \operatorname{Trace} \pi(g).$$

4. 记 $D(G)$ 为 G 上所有分布构成的线性空间(也就是 $C(G)$ 的对偶空间里),$D(G)^G$ 是 G 共轭不变分布构成的子空间. 证明:

$$\{O(g, \cdot) \mid g \in G\}$$

和

$$\{\Theta_\pi \mid \ \pi \text{ 是不可约表示}\}$$

在 $D(G)^G$ 中都是弱稠密的.

在这个问题里要是把“紧”的条件去掉, 你还能说什么话? Harish-Chandra为这个问题说了一辈子话. Arthur和Waldspurger也说过很多很多话. 这是群表示论和群上不变调和分析的中心问题, 在迹公式理论,尤其是内窥理论(endoscopy)中起着举足轻重的作用.

6.8 轨道积分的匹配(一)

这个问题看上去是个纯粹的微积分问题. 但其实它跟表示论有深刻的联系. 这是证明所谓Jacquet–Langlands对应的重要一步.

考虑 $\mathbb{R}$ 上的 Hamilton 四元数代数 $\mathbb{H}$ 和它的乘法群 G. 证明群 G 同构于$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 的子群

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 \neq 0 \right\}.$$

令 $\gamma \in G$, 我们记 G_γ 为 γ 的中心化子. 如果 $f \in C_c^\infty(G)$, 我们定义轨道积分

$$O(\gamma, f) = \int_{G_\gamma \backslash G} f(g^{-1}\gamma g) \mathrm{d}g.$$

这里的测度取 $G_\gamma \backslash G$ 上的右 G-不变测度. 由于空间是紧的, 所以积分显然是收敛的.

现在考虑 $G' = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $\gamma' \in G'$, $G'_{\gamma'}$ 是中心化子. 对于 $f' \in C_c^\infty(G')$, 我们同样定义轨道积分

$$O(\gamma', f') = \int_{G'_{\gamma'} \backslash G'} f'(g^{-1}\gamma' g) \mathrm{d}g.$$

现在群不紧了, 这个积分还收敛吗?

最后证明, 给定 $f \in C_c^\infty(G)$, 我们可以找到 $f' \in C_c^\infty(G')$, 使得对于所有的 $\gamma \in G$ 和 $\gamma' \in G'$, 如果他们在 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 中共轭, 那么

$$O(\gamma, f) = O(\gamma', f').$$

反过来从 f' 出发你能找到 f 满足类似的条件吗?

6.9 球面簇上的调和分析

上面的问题我们考虑了共轭等价类上的积分. 同样, 我们可以考虑别的, 比方说双陪集上的积分. 这就是下面的两则材料.

还是考虑 $\mathbb{R}$ 上的 Hamilton 四元数代数 $\mathbb{H}$ 和它的乘法群 G, $H = \mathbb{C}^\times$ 自然嵌入 G 作为 G 的子群. 群 G 的中心 Z 是什么?

1. 设 π 是 G 的不可约表示, f 是 π 的一个矩阵系数, $\chi : H \to \mathbb{C}^\times$ 是 H 的特征. 定义

$$\alpha(f, \chi) = \int_{Z \backslash H} f(h)\overline{\chi(h)} \mathrm{d}h.$$

   证明给定 χ, 存在 f 使得 $\alpha(f, \chi) \neq 0$ 当且仅当 $\mathrm{Hom}_H(\pi|_H, \chi) \neq 0$.

2. 接上题, 对于任意 $f \in C(G)$, 我们定义

$$J(f) = \int_{Z \backslash H} \mathrm{Trace}(\pi(h)\pi(f)) \mathrm{d}h.$$

   证明相对Plancherel公式

$$\int_H f(h)\overline{\chi(h)} \mathrm{d}h = \sum_\pi (\dim \pi) J_\pi(f).$$

   这里 π 过遍 G 的所有表示 (想想看, 哪些表示 $J_\pi(f)$ 恒等于零?).

6.10 轨道积分的匹配(二)

对于 $\epsilon=\pm 1$, 考虑如下定义的 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 的子群$\widetilde{G}_\epsilon$,

$$\widetilde{G}_\epsilon=\left\{\begin{pmatrix} a & \epsilon b \\ \overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix} \,\middle|\, a,b\in\mathbb{C},\ |a|^2+|b|^2\neq 0\right\}.$$

对 $\epsilon=\pm 1$, 我们都记 $\widetilde{G}_\epsilon$ 的中心为 Z, 定义 $G_\epsilon=\widetilde{G}_\epsilon/Z$. 于是 $H\simeq\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times$ 对角线嵌入 G_ϵ 作为 G_ϵ 的子群. 对于 $f_\epsilon\in C_c^\infty(G_\epsilon)$, $x\in\mathbb{R}\backslash\{0,\pm 1\}$, 我们定义轨道积分

$$O(x,f_\epsilon)=\int_{Z\backslash H\times H} f\left(h_1^{-1}\begin{pmatrix}1 & \epsilon x\\ x & 1\end{pmatrix}h_2\right)\mathrm{d}h_1\mathrm{d}h_2.$$

另外我们考虑群 $G'=\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ 和对角线子群 $H'\simeq\mathbb{R}^\times$. 对于 $f'\in C_c^\infty(G')$, $x\in\mathbb{R}\backslash\{0,\pm 1\}$, 我们定义轨道积分

$$O(x,\mathrm{sgn},f')=\int_{H'\times H'} f'\left(h_1^{-1}\begin{pmatrix}1 & x\\ 1 & 1\end{pmatrix}h_2\right)\mathrm{sgn}(\det h_1^{-1}h_2)\mathrm{d}h_1\mathrm{d}h_2,$$

这里 sgn 是符号函数, det 是 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 上的行列式函数.

1. 写下双陪集 $H\backslash G/H$ 和 $H'\backslash G'/H'$ 的全部代表元. 你能看出点什么门道不?
2. 证明: 对于任意的 $f'\in C_c^\infty(G')$, 存在 $f_\epsilon\in C_c^\infty(G_\epsilon)$, $\epsilon=\pm 1$, 使得

$$O(\epsilon x^2,\mathrm{sgn},f')=O(x,f_\epsilon).$$

   反过来, 给定 $f_\epsilon\in C_c^\infty(G_\epsilon)$, $\epsilon=\pm 1$, 那么存在 $f'\in C_c^\infty(G')$, 使得

$$O(\epsilon x^2,\mathrm{sgn},f')=O(x,f_\epsilon).$$

3. 大家体会一下符号函数起了什么作用? 换言之, 假如我们在轨道积分的定义中去掉那个符号函数, 结论还可能成立吗?