HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

002 班 (电气) 课程信息

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2025-09-09 到 2025-11-13
- 期末考试在课程结束后两周左右

002 班 (电气)QQ 群: **1002019981**
入群答案 **1400261B**

教材: 《复变函数与积分变换》

003 班 (自动化) 课程信息

- 课时: 共 10 周 40 课时, 从 2025-09-09 到 2025-11-13
- 期末考试在课程结束后两周左右

003 班 (自动化)QQ 群: **1006453495**
入群答案 **1400261B**

教材: 《复变函数与积分变换》

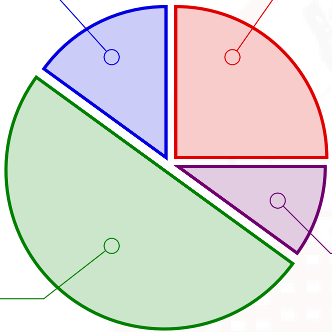
成绩构成

作业 15 分

作业通过超星发布和提交，约两周交一次. **作业必须按时提交，不允许补交**.

课堂测验 25 分

课堂测验共 3 次，取最高的两次平均. 测验范围和时间会提前通知. **测验时在教室内作答，否则按未考处理**.



期末考试 50 分

期末卷面需要达到 45 分才计算总评分数，45 分以下直接不及格.

其它 10 分

完成超星各个章节的任务点.

复变函数的应用非常广泛，它包括：

复变函数的应用非常广泛，它包括：

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……

复变函数的应用非常广泛，它包括：

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……

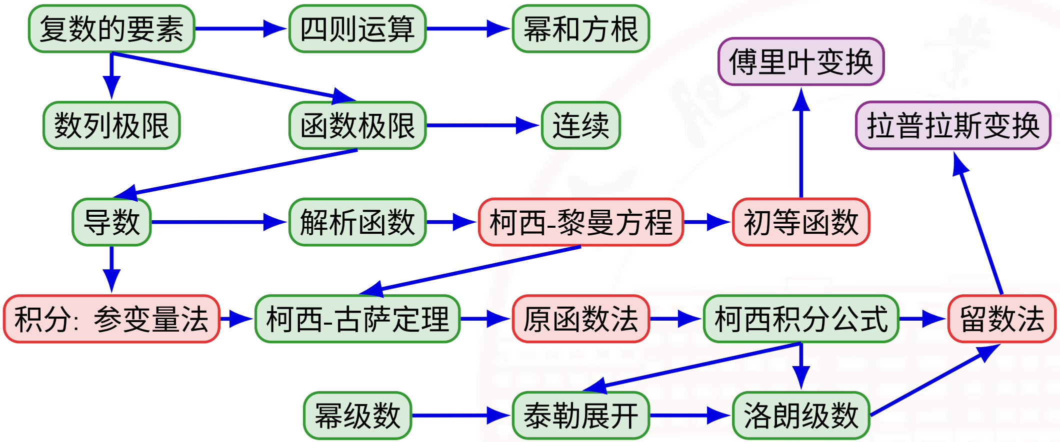
复变函数的应用非常广泛，它包括：

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- 信息学、电子学、电气工程……

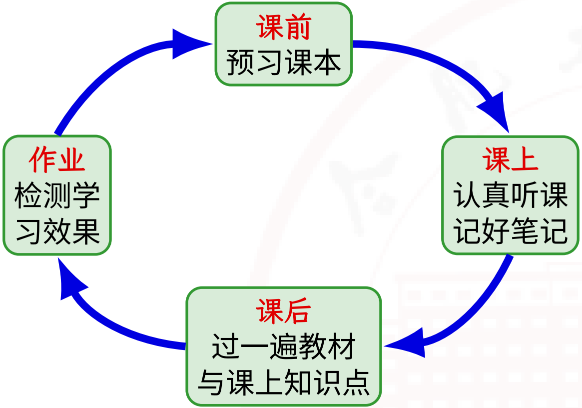
复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- 信息学、电子学、电气工程……

可以说复变函数应用之广, 在大学数学课程中仅次于高等数学和线性代数.


复数的要素
四则运算
幂和方根
傅里叶变换
数列极限
函数极限
连续
拉普拉斯变换
导数
解析函数
柯西-黎曼方程
初等函数
积分：参变量法
柯西-古萨定理
原函数法
柯西积分公式
留数法
幂级数
泰勒展开
洛朗级数

课程学习方法



第一章　复数与复变函数

1. 复数及其代数运算
2. 复数的三角形式与指数形式
3. 三角和指数形式在计算中的运用
4. 曲线和区域
5. 复变函数
6. 极限和连续性

第一节　复数及其代数运算

- 复数的产生
- 复数的概念
- 复数的代数运算
- 共轭复数

复数起源于多项式方程的求根问题.

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$.

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$. 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$. 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$. 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$. 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;

(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$. 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;

(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;

(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根.

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$. 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;

(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;

(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根.

可以看出, 在一元二次方程中, 我们可以舍去包含负数开方的解.

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$. 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta=b^2-4c$.

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;
(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;
(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根.

可以看出, 在一元二次方程中, 我们可以舍去包含负数开方的解. 然而在一元三次方程中, 即便只考虑实数根也会不可避免地引入负数开方.

例. 解方程 $x^3 + 6x - 20 = 0$.

例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解答. 设 $x=u+v$,

例题：三次方程求解（一个实根）

例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解答. 设 $x=u+v$, 那么

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解答. 设 $x=u+v$, 那么

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望

$$u^3+v^3=20, \qquad uv=-2.$$

例题：三次方程求解 (一个实根)

例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解答. 设 $x=u+v$, 那么

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望

$$u^3+v^3=20, \qquad uv=-2.$$

那么 u^3,v^3 满足一元二次方程

$$X^2-20X-8=0.$$

例. 解方程 $x^3 + 6x - 20 = 0$.

解答. 设 $x = u + v$, 那么

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + 6(u + v) - 20 = 0.$$

我们希望

$$u^3 + v^3 = 20, \qquad uv = -2.$$

那么 u^3, v^3 满足一元二次方程

$$X^2 - 20X - 8 = 0.$$

解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3.$$

例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解答. 设 $x=u+v$, 那么

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望

$$u^3+v^3=20,\qquad uv=-2.$$

那么 u^3,v^3 满足一元二次方程

$$X^2-20X-8=0.$$

解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

所以 $u=1\pm\sqrt{3}$, $v=1\mp\sqrt{3}$.

例题：三次方程求解 (一个实根)

例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解答. 设 $x=u+v$, 那么

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望

$$u^3+v^3=20, \qquad uv=-2.$$

那么 u^3, v^3 满足一元二次方程

$$X^2-20X-8=0.$$

解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

所以 $u=1\pm\sqrt{3}$, $v=1\mp\sqrt{3}$. $x=u+v=2$.

例. 解方程 $x^3+6x-20=0$.

解答. 设 $x=u+v$, 那么

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望

$$u^3+v^3=20, \qquad uv=-2.$$

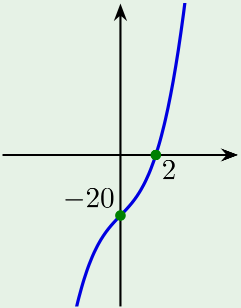
那么 u^3,v^3 满足一元二次方程

$$X^2-20X-8=0.$$

解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

所以 $u=1\pm\sqrt{3}$, $v=1\mp\sqrt{3}$. $x=u+v=2$.



例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

例题：三次方程求解（三个实根）

例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解答. 类似地 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \qquad uv = \frac{7}{3}.$$

例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解答. 类似地 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \qquad uv = \frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + 343/27 = 0$.

例题：三次方程求解 (三个实根)

例. 解方程 $x^3-7x+6=0$.

解答. 类似地 $x=u+v$, 其中

$$u^3+v^3=-6, \qquad uv=\frac{7}{3}.$$

于是 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2+6X+343/27=0$.

该方程无实数解，我们可以强行解得 $u^3=-3+\dfrac{10}{9}\sqrt{-3}$.

例题：三次方程求解 (三个实根)

例. 解方程 $x^3-7x+6=0$.

解答. 类似地 $x=u+v$, 其中

$$u^3+v^3=-6,\qquad uv=\frac{7}{3}.$$

于是 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2+6X+343/27=0$.

该方程无实数解, 我们可以强行解得 $u^3=-3+\dfrac{10}{9}\sqrt{-3}$. 于是

$$u=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

例. 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解答. 类似地 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \qquad uv = \frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + 343/27 = 0$.

该方程无实数解, 我们可以强行解得 $u^3 = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}$. 于是

$$u = \frac{3+2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9+\sqrt{-3}}{6}, \frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

$$v = \frac{3-2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9-\sqrt{-3}}{6}, \frac{3+5\sqrt{-3}}{6},$$

例题：三次方程求解 (三个实根)

例. 解方程 $x^3-7x+6=0$.

解答. 类似地 $x=u+v$, 其中

$$u^3+v^3=-6,\qquad uv=\frac{7}{3}.$$

于是 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2+6X+343/27=0$.

该方程无实数解，我们可以强行解得 $u^3=-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}$. 于是

$$u=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

$$v=\frac{3-2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9-\sqrt{-3}}{6},\frac{3+5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x=u+v=2,-3,1.$$

例题：三次方程求解 (三个实根)

例. 解方程 $x^3-7x+6=0$.

解答. 类似地 $x=u+v$, 其中

$$u^3+v^3=-6,\qquad uv=\frac{7}{3}.$$

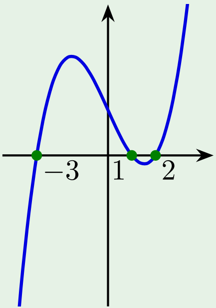
于是 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2+6X+343/27=0$.

该方程无实数解，我们可以强行解得 $u^3=-3+\dfrac{10}{9}\sqrt{-3}$. 于是

$$u=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\ \frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\ \frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

$$v=\frac{3-2\sqrt{-3}}{3},\ \frac{-9-\sqrt{-3}}{6},\ \frac{3+5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x=u+v=2,-3,1.$$



一般情形三次方程的根

一般地，方程 $x^3+px+q=0$ 的解为 ($p=0$ 情形较简单，这里不考虑)

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

一般情形三次方程的根

一般地，方程 $x^3+px+q=0$ 的解为 ($p=0$ 情形较简单，这里不考虑)

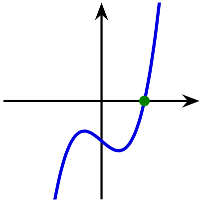
$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

通过分析函数图像的极值点可以知道:

一般地，方程 $x^3+px+q=0$ 的解为 ($p=0$ 情形较简单，这里不考虑)

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

通过分析函数图像的极值点可以知道:



$\Delta>0$，有 1 个根

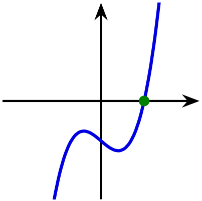
一般情形三次方程的根

非考试内容

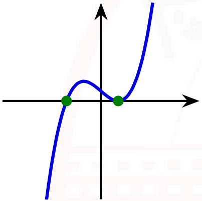
一般地，方程 $x^3+px+q=0$ 的解为 ($p=0$ 情形较简单，这里不考虑)

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

通过分析函数图像的极值点可以知道:



$\Delta>0$, 有 1 个根



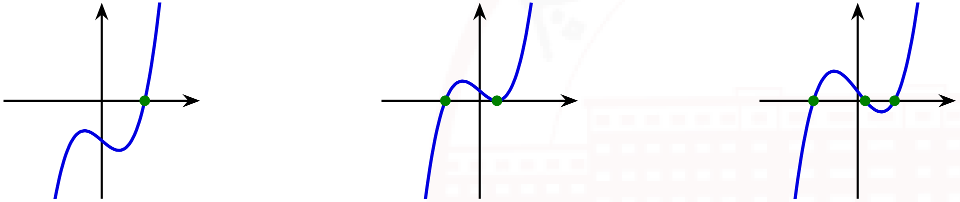
$\Delta=0$, 有 2 个根

$x=-\sqrt[3]{4q},\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).

一般地, 方程 $x^3+px+q=0$ 的解为 ($p=0$ 情形较简单, 这里不考虑)

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

通过分析函数图像的极值点可以知道:



$\Delta>0$, 有 1 个根　　$\Delta=0$, 有 2 个根　　$\Delta<0$, 有 3 个根

$x=-\sqrt[3]{4q}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).

由此可见, 若想使用求根公式, 就必须接受负数开方.

由此可见, 若想使用求根公式, 就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢?

由此可见, 若想使用求根公式, 就**必须接受负数开方**. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 这个问题在我们学习了第一章的内容之后可以得到回答.

由此可见，若想使用求根公式，就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时，从求根公式一定能得到 3 个实根呢？这个问题在我们学习了第一章的内容之后可以得到回答.

尽管在十六世纪，人们已经得到了三次方程的求根公式，然而对其中出现的虚数，却是难以接受.

由此可见, 若想使用求根公式, 就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 这个问题在我们学习了第一章的内容之后可以得到回答.

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受. 莱布尼兹曾说: 圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根。

由此可见, 若想使用求根公式, 就**必须接受负数开方**. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 这个问题在我们学习了第一章的内容之后可以得到回答.

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受. 莱布尼兹曾说: *圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根。* 不过, 现在我们可以用更为现代和严格的语言来引入复数.

现在我们来正式介绍复数的概念.

复数的定义

现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

复数的定义

现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

定义. **固定一个记号** i**,** **复数就是形如** $z = x + y\mathrm{i}$ **的元素, 其中** x, y **均是实数, 且不同的** (x, y) **对应不同的复数.**

复数的定义

现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

定义. **固定一个记号 i, 复数就是形如 $z = x + y\mathrm{i}$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.**

回忆全体实数、有理数、整数、自然数构成的集合分别记作 $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$.

复数的定义

现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

定义. **固定一个记号 i, 复数就是形如 $z = x + y\mathrm{i}$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.**

回忆全体实数、有理数、整数、自然数构成的集合分别记作 $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$. 将全体复数记作 $\mathbb{C}$.

复数的定义

现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

定义. 固定一个记号 i, **复数**就是形如 $z = x + y\mathrm{i}$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

回忆全体实数、有理数、整数、自然数构成的集合分别记作 $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$. 将**全体复数记作** $\mathbb{C}$.

实数 x 可以自然地看成复数 $x + 0\mathrm{i}$.

复数的定义

现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

定义. **固定一个记号 i, 复数就是形如 $z=x+y\mathrm{i}$ 的元素, 其中 x,y 均是实数, 且不同的 (x,y) 对应不同的复数.**

回忆全体实数、有理数、整数、自然数构成的集合分别记作 $\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$. 将全体复数记作 $\mathbb{C}$.

实数 x 可以自然地看成复数 $x+0\mathrm{i}$. 于是我们有 $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$.

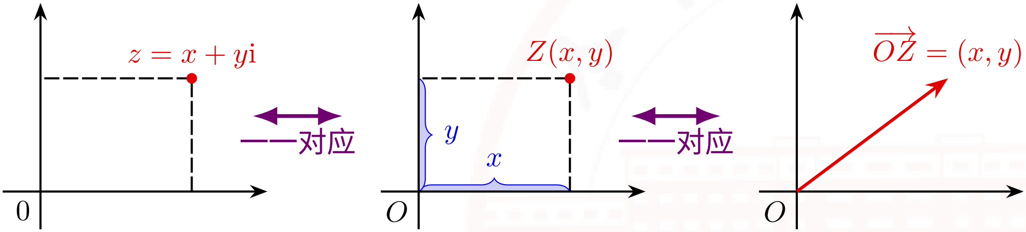
$\mathbb{C}$ 自然构成一个二维实线性空间, 且 $\{1, \mathrm{i}\}$ 是一组基.

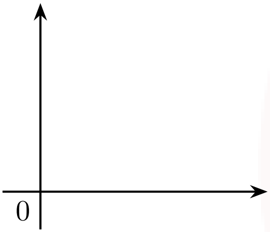
复平面

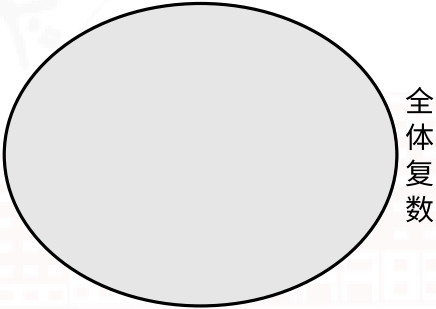
$\mathbb{C}$ 自然构成一个二维实线性空间, 且 $\{1, \mathrm{i}\}$ 是一组基. 因此它和平面上的点可以建立一一对应, 并将建立起这种对应的平面称为**复平面**.

复平面

$\mathbb{C}$ 自然构成一个二维实线性空间, 且 $\{1, \mathrm{i}\}$ 是一组基. 因此它和平面上的点可以建立一一对应, 并将建立起这种对应的平面称为**复平面**.

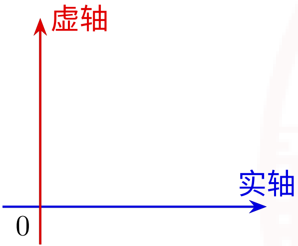


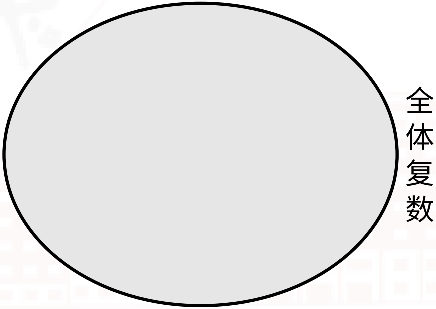

0


全
体
复
数

实部和虚部，虚数和纯虚数

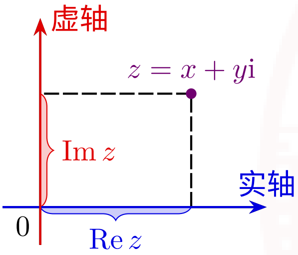
- x, y 轴分别对应复平面的实轴和虚轴.

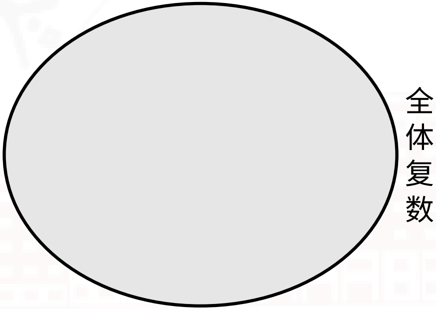




实部和虚部，虚数和纯虚数

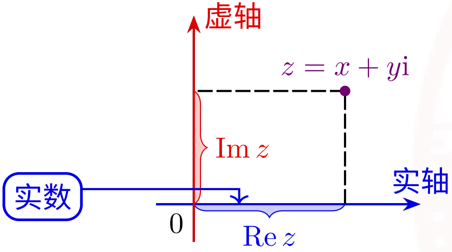
- x, y 轴分别对应复平面的**实轴**和**虚轴**.
- 称 $z = x + y\mathrm{i}$ 中 $x = \operatorname{Re} z$ 为 z 的**实部**; $y = \operatorname{Im} z$ 为 z 的**虚部**.

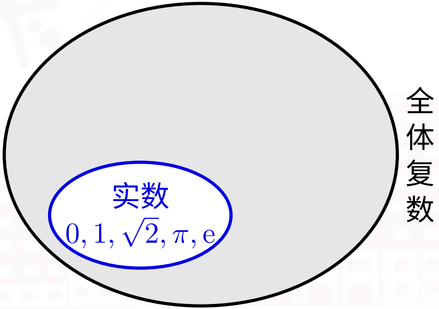




实部和虚部，虚数和纯虚数

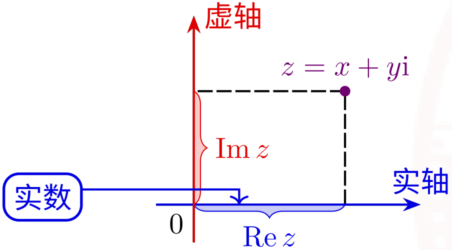
- x, y 轴分别对应复平面的**实轴**和**虚轴**.
- 称 $z = x + y\mathrm{i}$ 中 $x = \operatorname{Re} z$ 为 z 的**实部**; $y = \operatorname{Im} z$ 为 z 的**虚部**.
- 当虚部 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, z 为实数, 它落在实轴上.

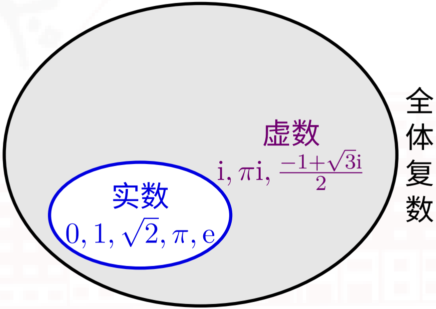




实部和虚部，虚数和纯虚数

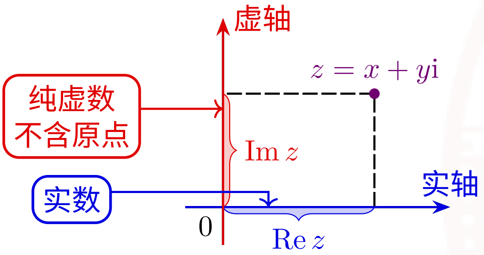
- x, y 轴分别对应复平面的实轴和虚轴.
- 称 $z = x + y\mathrm{i}$ 中 $x = \operatorname{Re} z$ 为 z 的实部; $y = \operatorname{Im} z$ 为 z 的虚部.
- 当虚部 $\operatorname{Im} z = 0$ 时，z 为实数，它落在实轴上.
  - 不是实数的复数是虚数.

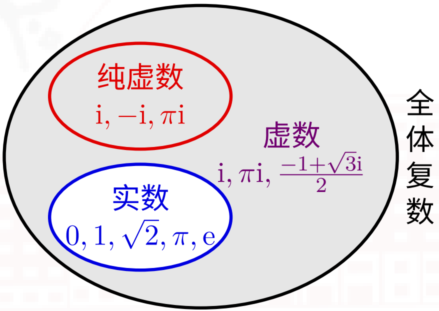




实部和虚部，虚数和纯虚数

- x, y 轴分别对应复平面的**实轴**和**虚轴**.
- 称 $z = x + y\mathrm{i}$ 中 $x = \operatorname{Re} z$ 为 z 的**实部**; $y = \operatorname{Im} z$ 为 z 的**虚部**.
- 当虚部 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, z 为实数, 它落在实轴上.
  - 不是实数的复数是**虚数**.
- 当实部 $\operatorname{Re} z = 0$ 且 $z \neq 0$ 时, z 为**纯虚数**, 它落在虚轴上.





例. 实数 x 取何值时, $z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是:

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时, $z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是:

(1) 实数;

(2) 纯虚数.

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时, $z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是:

(1) 实数;　　(2) 纯虚数.

解答.

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时，$z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是：

(1) 实数；

(2) 纯虚数.

解答.

(1) $\operatorname{Im} z = x^2+5x-6=0$，即 $x=1$ 或 -6.

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时，$z = (x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是：

(1) 实数；　　(2) 纯虚数.

解答.

(1) $\operatorname{Im} z = x^2+5x-6=0$，即 $x=1$ 或 -6.

(2) $\operatorname{Re} z = x^2+3x-4=0$，即 $x=1$ 或 -4.

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时，$z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是：

(1) 实数；

(2) 纯虚数.

解答.

(1) $\operatorname{Im} z = x^2+5x-6=0$，即 $x=1$ 或 -6.

(2) $\operatorname{Re} z = x^2+3x-4=0$，即 $x=1$ 或 -4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z = x^2+5x-6\neq 0$，因此 $x\neq 1$.

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时，$z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是：

(1) 实数；　　(2) 纯虚数.

解答.

(1) $\operatorname{Im} z=x^2+5x-6=0$，即 $x=1$ 或 -6.

(2) $\operatorname{Re} z=x^2+3x-4=0$，即 $x=1$ 或 -4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z=x^2+5x-6\neq 0$，因此 $x\neq 1$. 故 $x=-4$.

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时，$z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是：

(1) 实数；　　(2) 纯虚数.

解答.

(1) $\operatorname{Im} z=x^2+5x-6=0$，即 $x=1$ 或 -6.

(2) $\operatorname{Re} z=x^2+3x-4=0$，即 $x=1$ 或 -4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z=x^2+5x-6\neq 0$，因此 $x\neq 1$. 故 $x=-4$.

练习. 若 $x^2(1+\mathrm{i})-x(5+4\mathrm{i})+4+3\mathrm{i}$ 是纯虚数，则实数 $x=$______.

例题：判断实数和纯虚数

例. 实数 x 取何值时，$z=(x^2+3x-4)+(x^2+5x-6)\mathrm{i}$ 是:

(1) 实数; (2) 纯虚数.

解答.

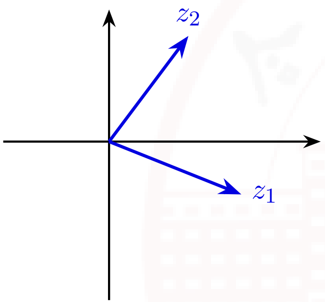
(1) $\operatorname{Im} z = x^2+5x-6=0$，即 $x=1$ 或 -6.

(2) $\operatorname{Re} z = x^2+3x-4=0$，即 $x=1$ 或 -4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z = x^2+5x-6\neq 0$，因此 $x\neq 1$. 故 $x=-4$.

练习. 若 $x^2(1+\mathrm{i})-x(5+4\mathrm{i})+4+3\mathrm{i}$ 是纯虚数，则实数 $x=$ __4__.

复数的加法与减法

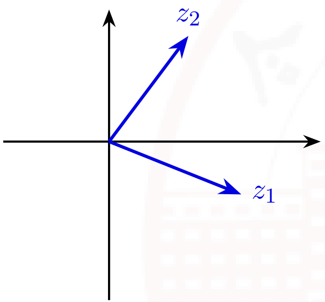
设 $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}, z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$.



复数的加法与减法

设 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}, z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$. 定义复数的**加法**和**减法**:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\mathrm{i},\quad z_1-z_2=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\mathrm{i}.$$

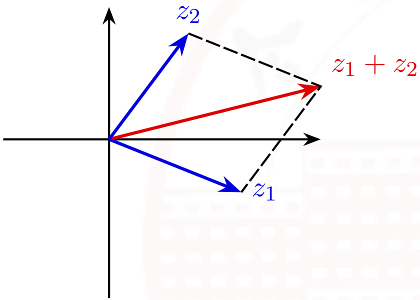


复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}, z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$. 定义复数的**加法**和**减法**:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i}, \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\mathrm{i}.$$

复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.

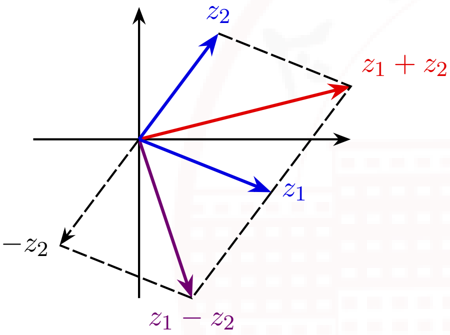


复数的加法与减法

设 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}, z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$. 定义复数的**加法**和**减法**:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\mathrm{i},\quad z_1-z_2=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\mathrm{i}.$$

复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.



规定 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$.

规定 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$. 定义复数的乘法:

$$
\begin{aligned}
z_1\cdot z_2 &= (x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i}) = x_1\cdot x_2 + x_1\cdot y_2\mathrm{i} + y_1\mathrm{i}\cdot x_2 + y_1\mathrm{i}\cdot y_2\mathrm{i} \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

规定 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$. 定义复数的**乘法**:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i}) = x_1\cdot x_2 + x_1\cdot y_2\mathrm{i} + y_1\mathrm{i}\cdot x_2 + y_1\mathrm{i}\cdot y_2\mathrm{i} \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

此时加法/乘法交换律, 结合律以及乘法分配律均成立.

规定 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$. 定义复数的**乘法**:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i}) = x_1\cdot x_2 + x_1\cdot y_2\mathrm{i} + y_1\mathrm{i}\cdot x_2 + y_1\mathrm{i}\cdot y_2\mathrm{i} \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

此时加法/乘法交换律, 结合律以及乘法分配律均成立.

待定系数可得复数的**除法**:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2-y_2\mathrm{i})}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\mathrm{i}.$$

规定 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$. 定义复数的**乘法**:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i}) = x_1\cdot x_2 + x_1\cdot y_2\mathrm{i} + y_1\mathrm{i}\cdot x_2 + y_1\mathrm{i}\cdot y_2\mathrm{i} \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

此时加法/乘法交换律, 结合律以及乘法分配律均成立.

待定系数可得复数的**除法**:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2-y_2\mathrm{i})}{x_2^2+y_2^2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\mathrm{i}.$$

对于正整数 n, 定义 z 的 n **次幂**为 n 个 z 相乘.

规定 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$. 定义复数的乘法:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i}) = x_1\cdot x_2 + x_1\cdot y_2\mathrm{i} + y_1\mathrm{i}\cdot x_2 + y_1\mathrm{i}\cdot y_2\mathrm{i} \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

此时加法/乘法交换律, 结合律以及乘法分配律均成立.

待定系数可得复数的除法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2-y_2\mathrm{i})}{x_2^2+y_2^2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\mathrm{i}.$$

对于正整数 n, 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘. 当 $z\neq 0$ 时, 还可以定义 $z^0=1, z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$.

例题：复数的乘幂

例.

例题：复数的乘幂

例.

(1) $\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{i}^3=-\mathrm{i}, \mathrm{i}^4=1.$

例.

(1) $\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{i}^3=-\mathrm{i}, \mathrm{i}^4=1$. 一般地，对于整数 n，

$$\mathrm{i}^{4n}=1, \quad \mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1, \quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}.$$

例.

(1) $\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{i}^3=-\mathrm{i}, \mathrm{i}^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$\mathrm{i}^{4n}=1, \quad \mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1, \quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, \omega^3=1$.

例题：复数的乘幂

例.

(1) $\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{i}^3=-\mathrm{i}, \mathrm{i}^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$\mathrm{i}^{4n}=1, \quad \mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1, \quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+\mathrm{i}$,

例.

(1) $\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{i}^3=-\mathrm{i}, \mathrm{i}^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$\mathrm{i}^{4n}=1, \quad \mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1, \quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+\mathrm{i}$, 则

$$z^2=2\mathrm{i}, \quad z^3=-2+2\mathrm{i}, \quad z^4=-4, \quad z^8=16=2^4.$$

例题：复数的乘幂

例.

(1) $\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{i}^3=-\mathrm{i}, \mathrm{i}^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$\mathrm{i}^{4n}=1, \quad \mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1, \quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+\mathrm{i}$, 则

$$z^2=2\mathrm{i}, \quad z^3=-2+2\mathrm{i}, \quad z^4=-4, \quad z^8=16=2^4.$$

将满足 $z^n=1$ 的复数 z 称为 n **次单位根**.

例题：复数的乘幂

例.

(1) $\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{i}^3=-\mathrm{i}, \mathrm{i}^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$\mathrm{i}^{4n}=1, \quad \mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1, \quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+\mathrm{i}$, 则

$$z^2=2\mathrm{i}, \quad z^3=-2+2\mathrm{i}, \quad z^4=-4, \quad z^8=16=2^4.$$

将满足 $z^n=1$ 的复数 z 称为 n **次单位根**. 那么 $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$ 是 4 次单位根, $1, \omega, \omega^2$ 是 3 次单位根, $-\omega$ 是 6 次单位根.

例题：复数代数式的计算

实数情形的等差数列求和公式、等比数列求和公式、二项式展开、平方差公式等代数恒等式在复数情形也成立.

例题：复数代数式的计算

实数情形的等差数列求和公式、等比数列求和公式、二项式展开、平方差公式等代数恒等式在复数情形也成立.

例. 化简 $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}$.

例题：复数代数式的计算

实数情形的等差数列求和公式、等比数列求和公式、二项式展开、平方差公式等代数恒等式在复数情形也成立.

例. 化简 $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}$.

解答. 根据等比数列求和公式,

$$1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}=\frac{\mathrm{i}^{1001}-1}{\mathrm{i}-1}$$

例题：复数代数式的计算

实数情形的等差数列求和公式、等比数列求和公式、二项式展开、平方差公式等代数恒等式在复数情形也成立.

例. 化简 $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}$.

解答. 根据等比数列求和公式,

$$1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}=\frac{\mathrm{i}^{1001}-1}{\mathrm{i}-1}=\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}-1}=1.$$

例题：复数代数式的计算

实数情形的等差数列求和公式、等比数列求和公式、二项式展开、平方差公式等代数恒等式在复数情形也成立.

例. 化简 $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}$.

解答. 根据等比数列求和公式,

$$1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}=\frac{\mathrm{i}^{1001}-1}{\mathrm{i}-1}=\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}-1}=1.$$

练习. 化简 $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2026}=$______.

例题：复数代数式的计算

实数情形的等差数列求和公式、等比数列求和公式、二项式展开、平方差公式等代数恒等式在复数情形也成立.

例. 化简 $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}$.

解答. 根据等比数列求和公式,

$$1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{1000}=\frac{\mathrm{i}^{1001}-1}{\mathrm{i}-1}=\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}-1}=1.$$

练习. 化简 $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2026}=$ ____-1____.

共轭复数的定义和性质

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\bar{z}$. 换言之, $\overline{x+y\mathrm{i}} = x - y\mathrm{i}$.

共轭复数的定义和性质

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+y\mathrm{i}} = x - y\mathrm{i}$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数的定义和性质

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+yi}=x-yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数. 共轭是一种对合

共轭复数的定义和性质

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+yi}=x-yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) $\overline{\overline{z}}$ 是 $\overline{z}$ 的共轭复数. 共轭是一种对合

(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. 共轭复数和四则运算交换

共轭复数的定义和性质

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+y\mathrm{i}} = x - y\mathrm{i}$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数. 共轭是一种对合

(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. 共轭复数和四则运算交换

(3) $z\overline{z} = (\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2$.

共轭复数的定义和性质

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+yi}=x-yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数. 共轭是一种对合

(2) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. 共轭复数和四则运算交换

(3) $z\overline{z}=(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2$.

(4) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re} z$, $z-\overline{z}=2\mathrm{i}\operatorname{Im} z$. x, y 和 $z, \overline{z}$ 可相互表示

共轭复数的定义和性质

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+yi}=x-yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数. 共轭是一种对合

(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. 共轭复数和四则运算交换

(3) $z\overline{z}=(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2$.

(4) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re} z$, $z-\overline{z}=2\mathrm{i}\operatorname{Im} z$. x,y 和 $z,\overline{z}$ 可相互表示

(5) $z=\overline{z}\iff z$ 是实数; $z=-\overline{z}\iff z$ 是纯虚数或 $z=0$. 判断实数和纯虚数

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+yi}=x-yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) $\overline{\overline{z}}$ 是 $\overline{z}$ 的共轭复数. 共轭是一种对合

(2) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. 共轭复数和四则运算交换

(3) $z\overline{z}=(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2$.

(4) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re} z$, $z-\overline{z}=2\mathrm{i}\operatorname{Im} z$. x, y 和 $z, \overline{z}$ 可相互表示

(5) $z=\overline{z} \iff z$ 是实数; $z=-\overline{z} \iff z$ 是纯虚数或 $z=0$. 判断实数和纯虚数

使用共轭复数进行计算和证明，往往比直接使用 x, y 表达的形式更简单.

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+y\mathrm{i}} = x - y\mathrm{i}$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数. 共轭是一种对合

(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. 共轭复数和四则运算交换

(3) $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

(4) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\operatorname{Im} z$. x, y 和 $z, \overline{z}$ 可相互表示

(5) $z = \overline{z} \iff z$ 是实数; $z = -\overline{z} \iff z$ 是纯虚数或 $z = 0$. 判断实数和纯虚数

使用共轭复数进行计算和证明，往往比直接使用 x, y 表达的形式更简单.

练习. z 关于虚轴的对称点是______.

共轭复数的定义和性质

定义. 称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+yi}=x-yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) $\overline{\overline{z}}$ 是 z 的共轭复数. 共轭是一种对合

(2) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. 共轭复数和四则运算交换

(3) $z\overline{z}=(\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2$.

(4) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}z$, $z-\overline{z}=2\mathrm{i}\operatorname{Im}z$. x,y 和 $z,\overline{z}$ 可相互表示

(5) $z=\overline{z} \iff z$ 是实数; $z=-\overline{z} \iff z$ 是纯虚数或 $z=0$. 判断实数和纯虚数

使用共轭复数进行计算和证明，往往比直接使用 x,y 表达的形式更简单.

练习. z 关于虚轴的对称点是 $\underline{\quad -\overline{z} \quad}$.

例题：共轭复数证明等式

例. 证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

例题：共轭复数证明等式

例. 证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}, z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到.

例题：共轭复数证明等式

例. 证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}, z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

例题：共轭复数证明等式

例. 证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}, z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

证明. 由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$,

例. 证明 $z_1\cdot\overline{z_2}-\overline{z_1}\cdot z_2=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1\cdot\overline{z_2})$.

我们可以设 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}, z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

证明. 由于 $\overline{z_1\cdot\overline{z_2}}=\overline{z_1}\cdot\overline{\overline{z_2}}=\overline{z_1}\cdot z_2$, 因此

$$z_1\cdot\overline{z_2}-\overline{z_1}\cdot z_2=z_1\cdot\overline{z_2}-\overline{z_1\cdot\overline{z_2}}=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1\cdot\overline{z_2}).$$

□

例题：共轭复数判断实数

例. 设 $z = x + yi$ 是虚数. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $z + \dfrac{1}{z}$ 是实数.

例题：共轭复数判断实数

例. 设 $z=x+yi$ 是虚数. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $z+\dfrac{1}{z}$ 是实数.

证明. $z+\dfrac{1}{z}$ 是实数等价于

$$z+\frac{1}{z}=\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}},$$

例题：共轭复数判断实数

例. 设 $z=x+yi$ 是虚数. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $z+\dfrac{1}{z}$ 是实数.

证明. $z+\dfrac{1}{z}$ 是实数等价于

$$z+\frac{1}{z}=\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}},$$

等价于

$$z-\overline{z}=\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}=\frac{z-\overline{z}}{z\overline{z}},\qquad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1)=0.$$

例题：共轭复数判断实数

例. 设 $z=x+yi$ 是虚数. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $z+\dfrac{1}{z}$ 是实数.

证明. $z+\dfrac{1}{z}$ 是实数等价于

$$z+\frac{1}{z}=\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}},$$

等价于

$$z-\overline{z}=\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}=\frac{z-\overline{z}}{z\overline{z}},\qquad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1)=0.$$

由 z 是虚数可知 $z\neq\overline{z}$.

例题：共轭复数判断实数

例. 设 $z = x + yi$ 是虚数. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $z + \dfrac{1}{z}$ 是实数.

证明. $z + \dfrac{1}{z}$ 是实数等价于

$$z + \frac{1}{z} = \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}},$$

等价于

$$z - \overline{z} = \frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{z} = \frac{z - \overline{z}}{z\overline{z}}, \qquad (z - \overline{z})(z\overline{z} - 1) = 0.$$

由 z 是虚数可知 $z \neq \overline{z}$. 故上述等式等价于 $z\overline{z} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$. □

例题：复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数，

例题：复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例题：复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例. $z = -\dfrac{1}{\mathrm{i}} - \dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\bar{z}$.

例题：复数的代数计算

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例. $z = -\dfrac{1}{\mathrm{i}} - \dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, 求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\overline{z}$.

解答.

$$z = -\frac{1}{\mathrm{i}} - \frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$

例题：复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例. $z = -\dfrac{1}{\mathrm{i}} - \dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\bar{z}$.

解答.

$$z = -\frac{1}{\mathrm{i}} - \frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{i} - \frac{3\mathrm{i}-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i},$$

例题：复数的代数计算

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2+y_2^2}.$$

例. $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\overline{z}$.

解答.

$$z=-\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}-\frac{3\mathrm{i}-3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i},$$

$$\operatorname{Re} z=\frac{3}{2},\quad \operatorname{Im} z=-\frac{1}{2},\quad z\overline{z}=\Big(\frac{3}{2}\Big)^2+\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2=\frac{5}{2}.$$

例题：复数的代数计算

例. 设 $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}$, $z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$, 求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

例题：复数的代数计算

例. 设 $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}, z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$，求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解答.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5\mathrm{i}}{-3 + 4\mathrm{i}}$$

例题：复数的代数计算

例. 设 $z_1 = 5-5\mathrm{i}, z_2 = -3+4\mathrm{i}$，求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解答.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}} = \frac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3)^2+4^2}$$

例. 设 $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}, z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$，求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解答.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}} = \frac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3)^2+4^2} \\ &= \frac{(-15-20)+(-20+15)\mathrm{i}}{25}\end{aligned}$$

例题：复数的代数计算

例. 设 $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}, z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$，求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解答.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}} = \frac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3)^2+4^2}\\ &= \frac{(-15-20)+(-20+15)\mathrm{i}}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i},\end{aligned}$$

例题：复数的代数计算

例. 设 $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}, z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$，求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解答.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}} = \frac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3)^2+4^2} \\ &= \frac{(-15-20)+(-20+15)\mathrm{i}}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i},\end{aligned}$$

因此 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = -\dfrac{7}{5} + \dfrac{1}{5}\mathrm{i}.$

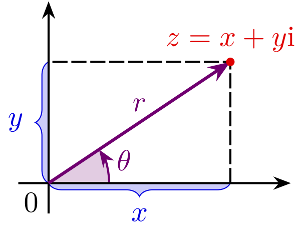
第二节　复数的三角形式与指数形式

- 复数的模和辐角
- 复数的三角和指数形式

复数的极坐标形式

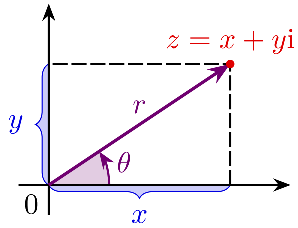
由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式.

由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式．以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以定义出复平面上的极坐标系．



复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以定义出复平面上的极坐标系.



$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

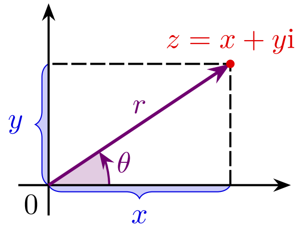
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以定义出复平面上的极坐标系.

定义.

(1) 称 r 为 z 的**模**，记为 $|z| = r$.



$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

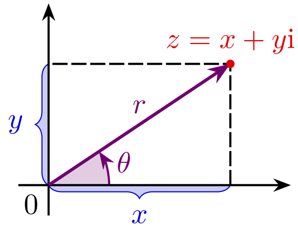
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式．以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以定义出复平面上的极坐标系．

定义.

(1) 称 r 为 z 的**模**，记为 $|z| = r$.

(2) 称 θ 为 z 的**辐角**，记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$.



$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

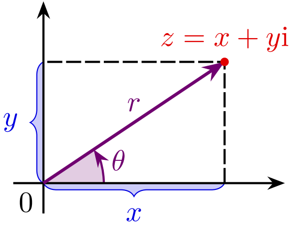
复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式．以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以定义出复平面上的极坐标系．

定义.

(1) 称 r 为 z 的**模**，记为 $|z| = r$.

(2) 称 θ 为 z 的**辐角**，记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$．约定 0 的辐角没有定义.



$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

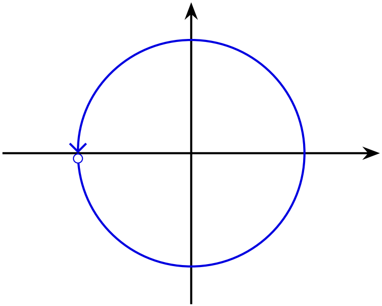
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

辐角主值

任意非零复数 z 都有无穷多个辐角.

辐角主值

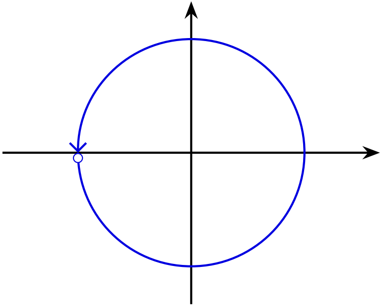
任意非零复数 z 都有无穷多个辐角. 称其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个辐角为**辐角主值**或**主辐角**, 记作 $\arg z$.



辐角主值

任意非零复数 z 都有无穷多个辐角. 称其中位于 $(-\pi,\pi]$ 的那个辐角为**辐角主值**或**主辐角**, 记作 $\arg z$. 那么

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

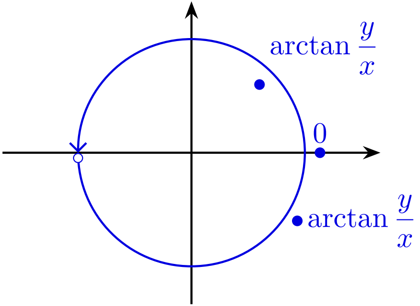


辐角主值

任意非零复数 z 都有无穷多个辐角. 称其中位于 $(-\pi,\pi]$ 的那个辐角为**辐角主值**或**主辐角**, 记作 $\arg z$. 那么

$$\boldsymbol{\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}.$$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

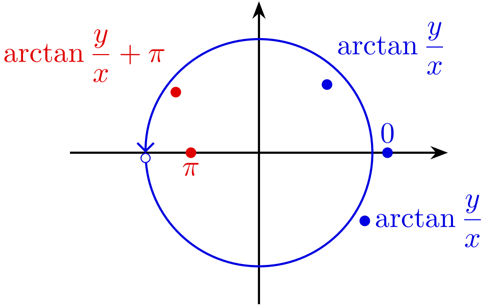


辐角主值

任意非零复数 z 都有无穷多个辐角. 称其中位于 $(-\pi,\pi]$ 的那个辐角为**辐角主值**或**主辐角**, 记作 $\arg z$. 那么

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0; \end{cases}$$

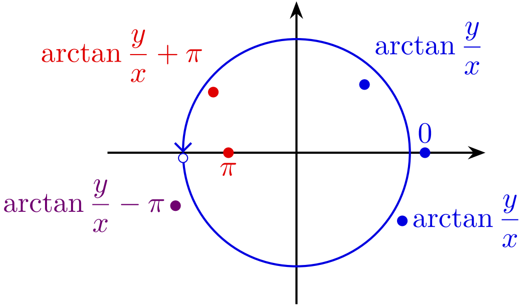


辐角主值

任意非零复数 z 都有无穷多个辐角. 称其中位于 $(-\pi,\pi]$ 的那个辐角为**辐角主值**或**主辐角**, 记作 $\arg z$. 那么

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

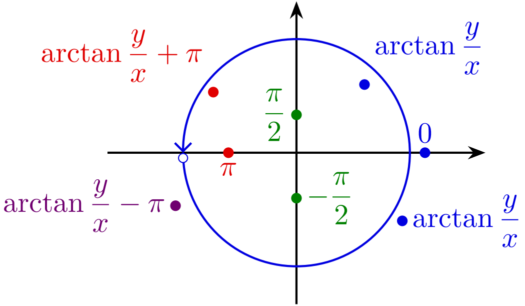
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \end{cases}$$



任意非零复数 z 都有无穷多个辐角. 称其中位于 $(-\pi,\pi]$ 的那个辐角为**辐角主值**或**主辐角**, 记作 $\arg z$. 那么

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant 0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0;\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0;\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases}$$

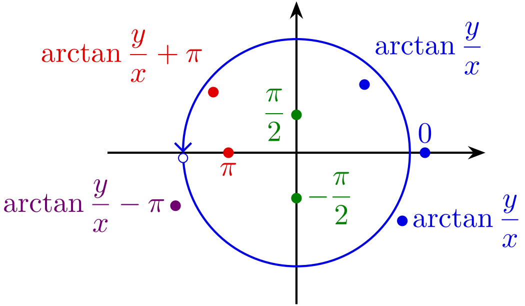


任意非零复数 z 都有无穷多个辐角. 称其中位于 $(-\pi,\pi]$ 的那个辐角为**辐角主值**或**主辐角**, 记作 $\arg z$. 那么

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

注意 $\arg\overline{z}=-\arg z$ **未必成立**, 当且仅当 z 不是负实数和 0 时该等式成立.

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant 0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0;\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0;\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases}$$



复数模的性质

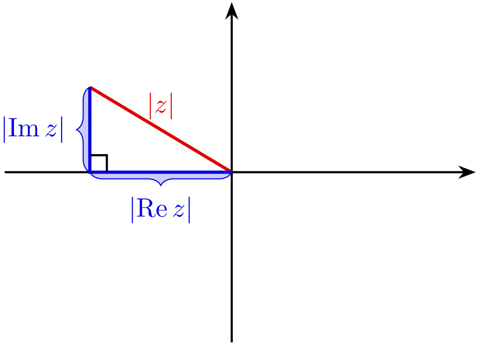
复数的模满足如下性质

复数模的性质

复数的模满足如下性质

(1) $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;

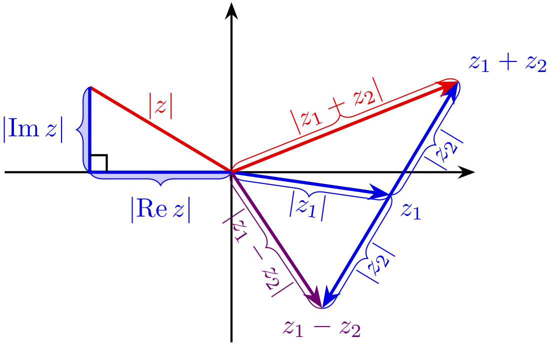
复数的模满足如下性质



(1) $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;

(2) $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$;

复数的模满足如下性质

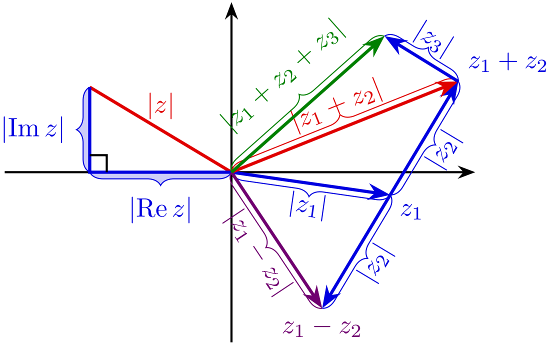


(1) $z\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$;

(2) $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z|+|\mathrm{Im}\, z|$;

(3) $\big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1\pm z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$;

复数的模满足如下性质



(1) $z\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$;

(2) $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z|+|\mathrm{Im}\, z|$;

(3) $\big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$;

(4) $|z_1+z_2+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$.

例题：共轭复数解决模的等式

例. 证明

(1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;

(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

例题：共轭复数解决模的等式

例. 证明

(1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;

(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

证明.

例题：共轭复数解决模的等式

例. 证明

(1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;

(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

证明.

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2}$$

例题：共轭复数解决模的等式

例. 证明

(1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;

(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

证明.

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} \cdot z_2 \overline{z_2}$$

例. 证明

(1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;

(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

证明.

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} \cdot z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

例. 证明

(1) $|z_1z_2|=|z_1\overline{z_2}|=|z_1|\cdot|z_2|$;

(2) $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明.

(1) 因为

$$|z_1z_2|^2=z_1z_2\cdot\overline{z_1z_2}=z_1\overline{z_1}\cdot z_2\overline{z_2}=|z_1|^2\cdot|z_2|^2,$$

所以 $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

例题：共轭复数解决模的等式

例. 证明

(1) $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;

(2) $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明.

(1) 因为

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2 \cdot \overline{z_1z_2} = z_1\overline{z_1} \cdot z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

例题：共轭复数解决模的等式

例. 证明

(1) $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1|\cdot|z_2|$; (2) $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明.

(1) 因为

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2\cdot\overline{z_1z_2} = z_1\overline{z_1}\cdot z_2\overline{z_2} = |z_1|^2\cdot|z_2|^2,$$

所以 $|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$. 因此 $|z_1\overline{z_2}| = |z_1|\cdot|\overline{z_2}| = |z_1|\cdot|z_2|$.

(2) 因为

$$\text{左边} = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2,$$

例题：共轭复数解决模的等式

例. 证明

(1) $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1|\cdot|z_2|$; (2) $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明.

(1) 因为

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2\cdot\overline{z_1z_2} = z_1\overline{z_1}\cdot z_2\overline{z_2} = |z_1|^2\cdot|z_2|^2,$$

所以 $|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$. 因此 $|z_1\overline{z_2}| = |z_1|\cdot|\overline{z_2}| = |z_1|\cdot|z_2|$.

(2) 因为

$$\text{左边} = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2,$$

$$\text{右边} = z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}},$$

例题：共轭复数解决模的等式

例. 证明

(1) $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$; (2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明.

(1) 因为

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2 \cdot \overline{z_1z_2} = z_1\overline{z_1} \cdot z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(2) 因为

$$\text{左边} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2,$$

$$\text{右边} = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}},$$

而 $\overline{z_1\overline{z_2}} = \overline{z_1}z_2$, 所以两侧相等. □

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得

复数的三角形式.

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

复数的三角和指数形式

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得

复数的三角形式.

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

定义 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \exp(\mathrm{i}\theta) := \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ (欧拉恒等式).

复数的三角和指数形式

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得

复数的三角形式.

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

定义 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \exp(\mathrm{i}\theta) := \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ (欧拉恒等式). 那么我们得到

复数的指数形式.

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\exp(\mathrm{i}\theta).$$

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得

复数的三角形式.

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

定义 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \exp(\mathrm{i}\theta) := \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ (欧拉恒等式). 那么我们得到

复数的指数形式.

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\exp(\mathrm{i}\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.

复数的三角和指数形式

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得

复数的三角形式.

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

定义 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \exp(\mathrm{i}\theta) := \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ (欧拉恒等式). 那么我们得到

复数的指数形式.

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\exp(\mathrm{i}\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式. 求复数的三角和指数形式的关键在于计算模和辐角.

例. 将 $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$ 化成三角形式和指数形式.

例. 将 $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$ 化成三角形式和指数形式.

解答. $r=|z|=\sqrt{12+4}=4.$

例题：求复数的三角和指数形式

例. 将 $z = -\sqrt{12} - 2\mathrm{i}$ 化成三角形式和指数形式.

解答. $r = |z| = \sqrt{12+4} = 4.$ 由于 z 在第三象限,

例题：求复数的三角和指数形式

例. 将 $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$ 化成三角形式和指数形式.

解答. $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$. 由于 z 在第三象限, 因此

$$\arg z=\arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi$$

例题：求复数的三角和指数形式

例. 将 $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$ 化成三角形式和指数形式.

解答. $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$. 由于 z 在第三象限, 因此

$$\arg z=\arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}.$$

例. 将 $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$ 化成三角形式和指数形式.

解答. $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$. 由于 z 在第三象限, 因此

$$\arg z=\arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z=4\Big(\cos\Big(-\frac{5\pi}{6}\Big)+\mathrm{i}\sin\Big(-\frac{5\pi}{6}\Big)\Big)=4\mathrm{e}^{-\frac{5\pi\mathrm{i}}{6}}.$$

例题：求复数的三角和指数形式

例. 将 $z = \sin\dfrac{\pi}{5} + \mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

例题：求复数的三角和指数形式

例. 将 $z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解答. $r=|z|=1.$

例题：求复数的三角和指数形式

例. 将 $z = \sin\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解答. $r = |z| = 1$. 由于 z 在第一象限，因此

$$\arg z = \arctan\frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)}$$

例题：求复数的三角和指数形式

例. 将 $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解答. $r=|z|=1$. 由于 z 在第一象限，因此

$$\arg z=\arctan\frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)}=\arctan\cot\frac{\pi}{5}$$

例. 将 $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解答. $r=|z|=1$. 由于 z 在第一象限，因此

$$\arg z=\arctan\frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)}=\arctan\cot\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}.$$

例题：求复数的三角和指数形式

例. 将 $z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解答. $r=|z|=1$. 由于 z 在第一象限，因此

$$\arg z=\arctan\frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)}=\arctan\cot\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}.$$

$$z=\cos\frac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10}=\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{10}}.$$

例题：求复数的三角和指数形式

例. 将 $z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解答. $r=|z|=1$. 由于 z 在第一象限，因此

$$\arg z=\arctan\frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)}=\arctan\cot\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}.$$

$$z=\cos\frac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10}=\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{10}}.$$

求复数的三角或指数形式时，只需取一个辐角就可以了，不要求必须是辐角主值.

例题：求复数的三角和指数形式

另解.

$$z = \sin\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}$$

例题：求复数的三角和指数形式

另解.

$$z = \sin\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)$$

例题：求复数的三角和指数形式

另解.

$$z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}=\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\Big)+\mathrm{i}\sin\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\Big)=\cos\frac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10}=\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{10}}.$$

例题：求复数的三角和指数形式

另解.

$$z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10}=\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{10}}.$$

练习. 将 $z=\sqrt{3}-3\mathrm{i}$ 化成三角形式和指数形式.

例题：求复数的三角和指数形式

另解.

$$z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}=\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\Big)+\mathrm{i}\sin\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\Big)=\cos\frac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10}=\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{10}}.$$

练习. 将 $z=\sqrt{3}-3\mathrm{i}$ 化成三角形式和指数形式.

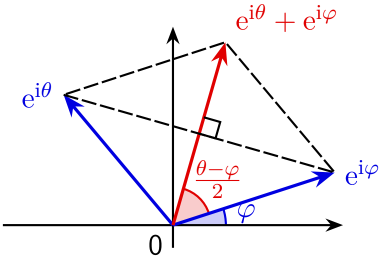
答案. $z=2\sqrt{3}\left(\cos\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)+\mathrm{i}\sin\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)\right)=2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}$，写成 $\frac{5\pi}{3}$ 也可以.

模为 1 的复数

两个模相等的复数之和的三角和指数形式形式较为简单.

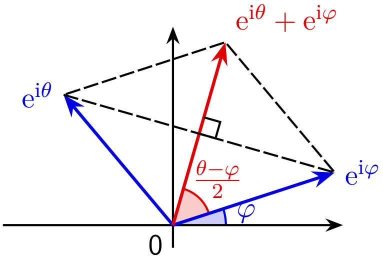
两个模相等的复数之和的三角和指数形式形式较为简单.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\mathrm{e}^{\frac{\theta+\varphi}{2}\mathrm{i}}.$$



两个模相等的复数之和的三角和指数形式形式较为简单.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\mathrm{e}^{\frac{\theta+\varphi}{2}\mathrm{i}}.$$



例. 若 $|z|=1, \arg z = \theta$, 则 $z+1 = 2\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\theta\mathrm{i}}{2}}$.

第三节　三角和指数形式在计算中的运用

- 复数的乘除
- 复数乘法的几何意义
- 复数的乘幂
- 复数的方根
- 实系数三次方程根的情况

复数的乘除与三角和指数形式

三角和指数形式在复数的乘法、除法和幂次计算中非常有用.

三角和指数形式在复数的乘法、除法和幂次计算中非常有用.

定理. 设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} \neq 0,$$

则

$$z_1z_2 = r_1r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\big) = r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\theta_1-\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)\big) = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}.$$

复数乘除的模和辐角

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

复数乘除的模和辐角

换言之，

$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

换言之,

$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2,\quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

多值函数相等是指两边所能取到的值构成的集合相等.

复数乘除的模和辐角

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

多值函数相等是指两边所能取到的值构成的集合相等. 注意上述等式中 Arg 不能换成 $\arg$,

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

多值函数相等是指两边所能取到的值构成的集合相等. 注意上述等式中 Arg 不能换成 arg, 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

未必成立.

复数乘除的模和辐角

换言之,

$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2,\quad \operatorname{Arg}\Big(\frac{z_1}{z_2}\Big) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

多值函数相等是指两边所能取到的值构成的集合相等. 注意上述等式中 Arg 不能换成 arg, 也就是说

$$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,\quad \arg\Big(\frac{z_1}{z_2}\Big) = \arg z_1 - \arg z_2$$

未必成立. 这是因为 $\arg z_1 \pm \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi,\pi]$ 上.

换言之,

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2,\quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2.$$

多值函数相等是指两边所能取到的值构成的集合相等. 注意上述等式中 Arg 不能换成 $\arg$, 也就是说

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2,\quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$$

未必成立. 这是因为 $\arg z_1\pm\arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi,\pi]$ 上. 当且仅当等式右侧落在区间 $(-\pi,\pi]$ 内时才成立, 否则等式两侧会相差 $\pm2\pi$.

证明. 根据和差的正弦、余弦公式可知

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$$

证明. 根据和差的正弦、余弦公式可知

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big) \end{aligned}$$

复数的乘除与三角和指数形式

证明. 根据和差的正弦、余弦公式可知

$$
\begin{aligned}
z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\
&= r_1r_2\big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big) \\
&= r_1r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\big)
\end{aligned}
$$

复数的乘除与三角和指数形式

证明. 根据和差的正弦、余弦公式可知

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big) \\ &= r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\big) \end{aligned}$$

因此乘法情形得证.

证明. 根据和差的正弦、余弦公式可知

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2\big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big) \\
&= r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\big)
\end{aligned}
$$

因此乘法情形得证. 设 $\dfrac{z_1}{z_2} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,

证明. 根据和差的正弦、余弦公式可知

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big) \\ &= r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\big) \end{aligned}$$

因此乘法情形得证. 设 $\dfrac{z_1}{z_2} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则由乘法情形可知

$$rr_2 = r_1, \quad \theta + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} z_1.$$

复数的乘除与三角和指数形式

证明. 根据和差的正弦、余弦公式可知

$$\begin{aligned}z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\ &= r_1r_2\big((\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)\big)\\ &= r_1r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\big)\end{aligned}$$

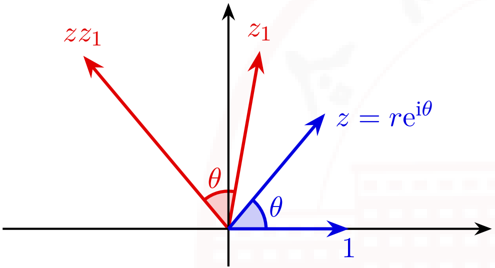
因此乘法情形得证. 设 $\dfrac{z_1}{z_2}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则由乘法情形可知

$$rr_2=r_1,\quad \theta+\operatorname{Arg}z_2=\operatorname{Arg}z_1.$$

因此 $r=\dfrac{r_1}{r_2}$, θ 可取 $\theta_1-\theta_2$. □

乘积的几何意义

从该定理可以看出，乘以复数 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 可以理解为模放大为 r 倍，并沿逆时针旋转角度 θ.



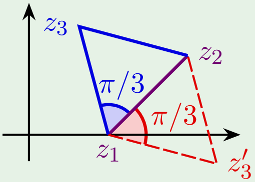
例题：复数解决平面几何问题

例. 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + \mathrm{i}$, 求它的另一个顶点.

例题：复数解决平面几何问题

例. 已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+\mathrm{i}$，求它的另一个顶点.

解答. 由于 $\overrightarrow{z_1z_3}$ 为 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$，

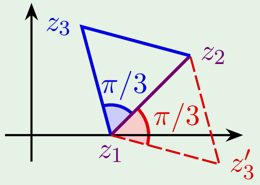


例题：复数解决平面几何问题

例. 已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+\mathrm{i}$, 求它的另一个顶点.

解答. 由于 $\overrightarrow{z_1z_3}$ 为 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$, 因此

$$z_3-z_1=(z_2-z_1)\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}$$

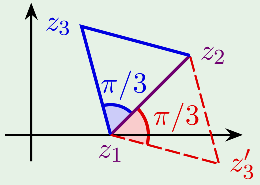


例题：复数解决平面几何问题

例. 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + \mathrm{i}$，求它的另一个顶点.

解答. 由于 $\overrightarrow{z_1z_3}$ 为 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$，因此

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi \mathrm{i}}{3}} = (1+\mathrm{i})\Big(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big)$$

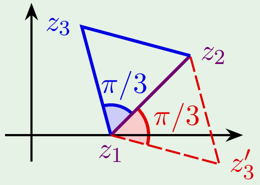


例题：复数解决平面几何问题

例. 已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+\mathrm{i}$, 求它的另一个顶点.

解答. 由于 $\overrightarrow{z_1z_3}$ 为 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$, 因此

$$
\begin{aligned}
z_3-z_1&=(z_2-z_1)\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}=(1+\mathrm{i})\Big(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big)\\
&=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\ \text{或}\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},
\end{aligned}
$$



例题：复数解决平面几何问题

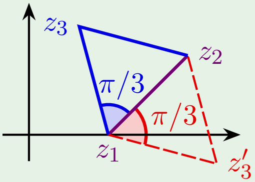
例. 已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+\mathrm{i}$，求它的另一个顶点.

解答. 由于 $\overrightarrow{z_1z_3}$ 为 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$，因此

$$z_3-z_1=(z_2-z_1)e^{\pm\frac{\pi i}{3}}=(1+\mathrm{i})\Big(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big)$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \text{ 或 } \frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

$$z_3=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \text{ 或 } \frac{3+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$



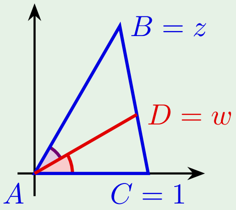
例题：复数解决平面几何问题

例. 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，证明 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DB}{DC}$.

例题：复数解决平面几何问题

例. 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，证明 $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$.

证明. 不妨设 $A = 0$, $B = z$, $C = 1$, $D = w$.

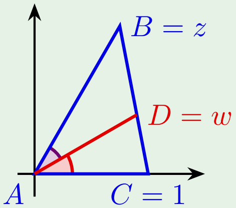


例题：复数解决平面几何问题

例. 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，证明 $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$.

证明. 不妨设 $A=0$, $B=z$, $C=1$, $D=w$. 设

$$\lambda = \frac{DC}{BC} = \frac{w-1}{z-1} \in (0,1).$$



例题：复数解决平面几何问题

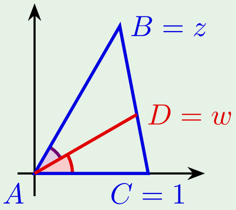
例. 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，证明 $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$.

证明. 不妨设 $A = 0$, $B = z$, $C = 1$, $D = w$. 设

$$\lambda = \frac{DC}{BC} = \frac{w-1}{z-1} \in (0,1).$$

那么

$$w = 1 + \lambda(z-1) = \lambda z + (1-\lambda).$$



例题：复数解决平面几何问题

例. 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，证明 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DB}{DC}$.

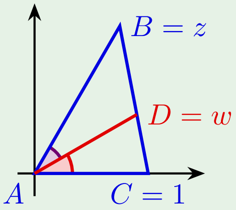
证明. 不妨设 $A=0$, $B=z$, $C=1$, $D=w$. 设

$$\lambda=\frac{DC}{BC}=\frac{w-1}{z-1}\in(0,1).$$

那么

$$w=1+\lambda(z-1)=\lambda z+(1-\lambda).$$

由于 $\angle BAD=\angle DAC$,



例题：复数解决平面几何问题

例. 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，证明 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DB}{DC}$.

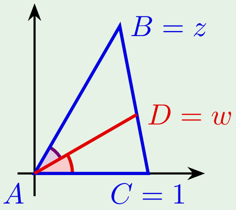
证明. 不妨设 $A=0$, $B=z$, $C=1$, $D=w$. 设

$$\lambda=\frac{DC}{BC}=\frac{w-1}{z-1}\in(0,1).$$

那么

$$w=1+\lambda(z-1)=\lambda z+(1-\lambda).$$

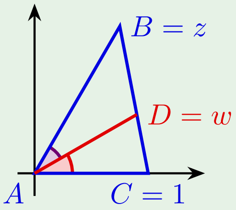
由于 $\angle BAD=\angle DAC$，根据复数乘法的几何意义，$\dfrac{z-0}{w-0}$ 是 $\dfrac{w-0}{1-0}$ 的正实数倍.



例题：复数解决平面几何问题

于是

$$\frac{w^2}{z} = \lambda^2 z + 2\lambda(1-\lambda) + \frac{(1-\lambda)^2}{z} \in \mathbb{R},$$

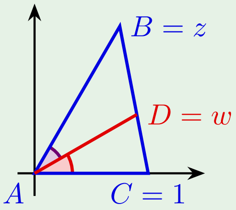


例题：复数解决平面几何问题

于是

$$\frac{w^2}{z} = \lambda^2 z + 2\lambda(1-\lambda) + \frac{(1-\lambda)^2}{z} \in \mathbb{R},$$

$$\lambda^2 z + \frac{(1-\lambda)^2}{z} = \lambda^2 \overline{z} + \frac{(1-\lambda)^2}{\overline{z}},$$



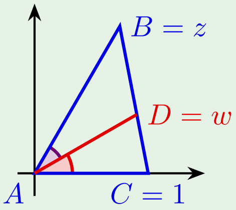
例题：复数解决平面几何问题

于是

$$\frac{w^2}{z} = \lambda^2 z + 2\lambda(1-\lambda) + \frac{(1-\lambda)^2}{z} \in \mathbb{R},$$

$$\lambda^2 z + \frac{(1-\lambda)^2}{z} = \lambda^2 \overline{z} + \frac{(1-\lambda)^2}{\overline{z}},$$

$$(\lambda^2|z|^2 - (1-\lambda)^2)(z - \overline{z}) = 0.$$



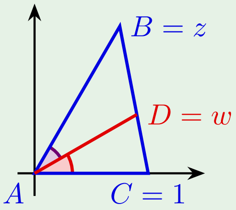
于是

$$\frac{w^2}{z} = \lambda^2 z + 2\lambda(1-\lambda) + \frac{(1-\lambda)^2}{z} \in \mathbb{R},$$

$$\lambda^2 z + \frac{(1-\lambda)^2}{z} = \lambda^2 \overline{z} + \frac{(1-\lambda)^2}{\overline{z}},$$

$$(\lambda^2|z|^2 - (1-\lambda)^2)(z-\overline{z}) = 0.$$

显然 $z \neq \overline{z}$.



例题：复数解决平面几何问题

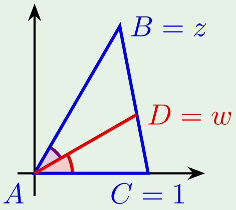
于是

$$\frac{w^2}{z}=\lambda^2 z+2\lambda(1-\lambda)+\frac{(1-\lambda)^2}{z}\in\mathbb{R},$$

$$\lambda^2 z+\frac{(1-\lambda)^2}{z}=\lambda^2\overline{z}+\frac{(1-\lambda)^2}{\overline{z}},$$

$$\left(\lambda^2|z|^2-(1-\lambda)^2\right)(z-\overline{z})=0.$$

显然 $z\neq\overline{z}$. 又因为 $0<\lambda<1$, 故



例题：复数解决平面几何问题

于是

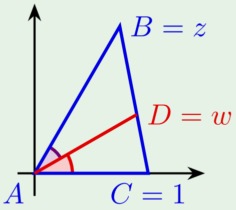
$$\frac{w^2}{z} = \lambda^2 z + 2\lambda(1-\lambda) + \frac{(1-\lambda)^2}{z} \in \mathbb{R},$$

$$\lambda^2 z + \frac{(1-\lambda)^2}{z} = \lambda^2 \overline{z} + \frac{(1-\lambda)^2}{\overline{z}},$$

$$(\lambda^2|z|^2 - (1-\lambda)^2)(z - \overline{z}) = 0.$$

显然 $z \neq \overline{z}$. 又因为 $0 < \lambda < 1$, 故

$$\frac{AB}{AC} = |z| = \frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{BC - DC}{DC} = \frac{DB}{DC}. \qquad \square$$



设

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0.$$

设

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0.$$

根据复数三角和指数形式的乘法和除法运算法则,

设

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0.$$

根据复数三角和指数形式的乘法和除法运算法则, 我们有

复数的乘幂.

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

设

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0.$$

根据复数三角和指数形式的乘法和除法运算法则, 我们有

复数的乘幂.

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特别地, 当 $r = 1$ 时, 我们得到**棣莫弗公式**

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta.$$

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$
\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= 2\cos^2\theta - 1, \\
\cos(3\theta) &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \\
\cos(4\theta) &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1, \\
\cos(5\theta) &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.
\end{aligned}
$$

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= 2\cos^2\theta - 1, \\
\cos(3\theta) &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \\
\cos(4\theta) &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1, \\
\cos(5\theta) &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.
\end{aligned}$$

一般地，可以证明 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的 n 次多项式，

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$
\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= 2\cos^2\theta - 1, \\
\cos(3\theta) &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \\
\cos(4\theta) &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1, \\
\cos(5\theta) &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.
\end{aligned}
$$

一般地, 可以证明 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的 n 次多项式, 这个多项式

$$g_n(T) = 2^{n-1}T^n - n2^{n-3}T^{n-2} + \cdots$$

叫做**切比雪夫多项式**.

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$
\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \ \ 2\cos^2\theta - \ \ 1, \\
\cos(3\theta) &= \ \ 4\cos^3\theta - \ \ 3\cos\theta, \\
\cos(4\theta) &= \ \ 8\cos^4\theta - \ \ 8\cos^2\theta + 1, \\
\cos(5\theta) &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.
\end{aligned}
$$

一般地, 可以证明 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的 n 次多项式, 这个多项式

$$g_n(T) = 2^{n-1}T^n - n2^{n-3}T^{n-2} + \cdots$$

叫做**切比雪夫多项式**. 它在计算数学的逼近理论中有着重要作用.

例题：复数乘幂的计算

例. 求 $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$.

例题：复数乘幂的计算

例. 求 $(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n$.

解答.

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big),$$

例题：复数乘幂的计算

例. 求 $(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n$.

解答.

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big),$$

$$1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big),$$

例题：复数乘幂的计算

例. 求 $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$.

解答.

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big),$$

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big),$$

$$(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n=2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\Big)=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

例题：复数乘幂的计算

例. 求 $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$.

解答.

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big),$$

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big),$$

$$(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n=2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\Big)=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

练习. 求 $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{2022}=$____________.

例题：复数乘幂的计算

例. 求 $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$.

解答.

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big),$$

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big),$$

$$(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n=2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\Big)=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

练习. 求 $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{2022}=$ $\underline{\quad -2^{2022} \quad}$.

例题：复数的乘幂的应用

复数的乘幂可用于计算三角函数有关的式子.

例题：复数的乘幂的应用

复数的乘幂可用于计算三角函数有关的式子.

例. 计算 $I = \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}$.

例题：复数的乘幂的应用

复数的乘幂可用于计算三角函数有关的式子.

例. 计算 $I=\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}$.

解答. 设 $z=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{5}}$.

例题：复数的乘幂的应用

复数的乘幂可用于计算三角函数有关的式子.

例. 计算 $I=\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}$.

解答. 设 $z=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{5}}$. 那么

$$I=\frac{z^2-z^3}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{z^4-z}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{z-z^4}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{z^3-z^2}{2\mathrm{i}}$$

例题：复数的乘幂的应用

复数的乘幂可用于计算三角函数有关的式子.

例. 计算 $I=\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}$.

解答. 设 $z=e^{\frac{2\pi i}{5}}$. 那么

$$\begin{aligned} I&=\frac{z^2-z^3}{2i}\cdot\frac{z^4-z}{2i}\cdot\frac{z-z^4}{2i}\cdot\frac{z^3-z^2}{2i}\\ &=\frac{1}{16}\big(5-(1+z+z^2+z^3+z^4)\big)=\frac{5}{16}. \end{aligned}$$

复数的方根

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$.

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0, \quad w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

复数的方根

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0, \quad w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

复数的方根

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0, \quad w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

比较两边的模可知

$$\rho^n = r, \quad \rho = \sqrt[n]{r}.$$

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0, \quad w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

比较两边的模可知

$$\rho^n = r, \quad \rho = \sqrt[n]{r}.$$

为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为**算术根**.

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n **次方根** $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0, \quad w = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

比较两边的模可知

$$\rho^n = r, \quad \rho = \sqrt[n]{r}.$$

为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为**算术根**. 由于 $n\varphi$ 和 θ 的正弦和余弦均相等, 因此存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

复数的方根

故 $w = w_k = \sqrt[n]{r}\exp\Big(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\mathrm{i}\Big)$.

复数的方根

故 $w = w_k = \sqrt[n]{r}\exp\Big(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\mathrm{i}\Big)$. 不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ 两两不同.

故 $w = w_k = \sqrt[n]{r}\exp\Big(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\mathrm{i}\Big)$. 不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \dots, n-1$.

复数的方根

故 $w=w_k=\sqrt[n]{r}\exp\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\mathrm{i}\right)$. 不难看出, $w_k=w_{k+n}$, 而 $w_0,w_1,\ldots,w_{n-1}$ 两两不同. 因此只需取 $k=0,1,\ldots,n-1$.

定理 (复数的方根). 任意一个非零复数 z 的 n 次方根有 n 个值:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\exp\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\mathrm{i}\right)=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

故 $w = w_k = \sqrt[n]{r}\exp\Big(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\mathrm{i}\Big)$. 不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \dots, n-1$.

定理 (复数的方根). 任意一个非零复数 z 的 n 次方根有 n 个值:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\exp\Big(\frac{\theta+2k\pi}{n}\mathrm{i}\Big) = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\Big), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

这些根的模都相等, 且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\dfrac{2\pi}{n}$.

故 $w = w_k = \sqrt[n]{r}\exp\Big(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\mathrm{i}\Big)$. 不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \dots, n-1$.

定理 (复数的方根). 任意一个非零复数 z 的 n 次方根有 n 个值:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\exp\Big(\frac{\theta+2k\pi}{n}\mathrm{i}\Big) = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\Big), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

这些根的模都相等, 且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\dfrac{2\pi}{n}$. 因此它们是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点.

例. 求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

例. 求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

解答. 由于 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi\mathrm{i}}{4}\right)$,

典型例题：复数方根的计算

例. 求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

解答. 由于 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi\mathrm{i}}{4}\right)$，因此

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\exp\frac{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)\mathrm{i}}{4},\quad k=0,1,2,3.$$

例. 求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

解答. 由于 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi\mathrm{i}}{4}\right)$，因此

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\exp\frac{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)\mathrm{i}}{4},\quad k=0,1,2,3.$$

于是该方根所有值为

$$w_0=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{16}},\ w_1=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\frac{9\pi\mathrm{i}}{16}},\ w_2=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\frac{17\pi\mathrm{i}}{16}},\ w_3=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\frac{25\pi\mathrm{i}}{16}}.$$

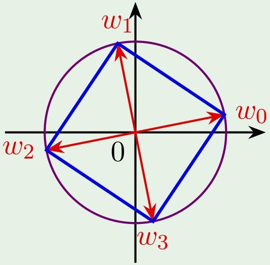
例. 求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

解答. 由于 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi\mathrm{i}}{4}\right)$, 因此

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\exp\frac{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)\mathrm{i}}{4},\quad k=0,1,2,3.$$

于是该方根所有值为

$$w_0=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{16}},\ w_1=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\frac{9\pi\mathrm{i}}{16}},\ w_2=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\frac{17\pi\mathrm{i}}{16}},\ w_3=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\frac{25\pi\mathrm{i}}{16}}.$$



乘幂和方根的辐角等式

练习. 计算 $\sqrt[6]{-1}=$ ________________________.

练习. 计算 $\sqrt[6]{-1} =$ $\underline{\pm\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2},\ \pm\mathrm{i},\ \pm\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}}$.

乘幂和方根的辐角等式

练习. 计算 $\sqrt[6]{-1} = \underline{\pm\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2},\ \pm\mathrm{i},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}}$.

注意当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Arg}(z^n) = n\operatorname{Arg} z$ **不成立**.

练习. 计算 $\sqrt[6]{-1} = \underline{\pm\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2},\ \pm\mathrm{i},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}}$.

注意当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Arg}(z^n) = n\operatorname{Arg} z$ **不成立**. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n\arg z + 2k\pi, \quad n\operatorname{Arg} z = n\arg z + 2nk\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

练习. 计算 $\sqrt[6]{-1} = \underline{\pm\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2},\ \pm\mathrm{i},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}}$.

注意当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Arg}(z^n) = n\operatorname{Arg} z$ **不成立**. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n\arg z + 2k\pi, \quad n\operatorname{Arg} z = n\arg z + 2nk\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

不过我们总有

$$\operatorname{Arg}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\operatorname{Arg} z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

乘幂和方根的辐角等式

练习. 计算 $\sqrt[6]{-1} =$ $\underline{\pm\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2},\ \pm\mathrm{i},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}}$.

注意当 $|n| \geqslant 2$ 时，$\operatorname{Arg}(z^n) = n\operatorname{Arg} z$ **不成立**. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n\arg z + 2k\pi, \quad n\operatorname{Arg} z = n\arg z + 2nk\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

不过我们总有

$$\operatorname{Arg}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\operatorname{Arg} z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

其中左边表示 z 的所有 n 次方根的所有辐角.

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根，$p\neq 0$.

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根，$p \neq 0$. 回顾求根公式:

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$. 回顾求根公式:

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

(1) 若 $\Delta>0$, 设 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$, 设实数 α 满足 $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$,

应用：三次方程的求根问题

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根，$p\neq 0$. 回顾求根公式:

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

(1) 若 $\Delta>0$，设 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$，设实数 α 满足 $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$，则

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$. 回顾求根公式:

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

(1) 若 $\Delta>0$, 设 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$, 设实数 α 满足 $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$, 则

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

应用: 三次方程的求根问题

非考试内容

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$. 回顾求根公式:

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

(1) 若 $\Delta>0$, 设 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}$, 设实数 α 满足 $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$, 则

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 若 $\Delta\leqslant 0$, 则 $p<0$, $|u|^2=-\frac{p}{3}>0$.

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根，$p\neq 0$. 回顾求根公式:

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

(1) 若 $\Delta>0$, 设 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$, 设实数 α 满足 $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$, 则

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 若 $\Delta\leqslant 0$, 则 $p<0$, $|u|^2=-\frac{p}{3}>0$. 从而 $v=\overline{u}$.

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$. 回顾求根公式:

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

(1) 若 $\Delta>0$, 设 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$, 设实数 α 满足 $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$, 则

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 若 $\Delta\leqslant 0$, 则 $p<0$, $|u|^2=-\frac{p}{3}>0$. 从而 $v=\overline{u}$. 设 $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}=u_1,u_2,u_3$,

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根，$p\neq 0$. 回顾求根公式:

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

(1) 若 $\Delta>0$, 设 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$, 设实数 α 满足 $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$, 则

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 若 $\Delta\leqslant 0$, 则 $p<0$, $|u|^2=-\frac{p}{3}>0$. 从而 $v=\overline{u}$. 设 $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}=u_1,u_2,u_3$, 则我们得到 3 个实根

$$x=u_1+\overline{u_1},\ u_2+\overline{u_2},\ u_3+\overline{u_3}.$$

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$. 回顾求根公式:

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

(1) 若 $\Delta>0$, 设 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}$, 设实数 α 满足 $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$, 则

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 若 $\Delta\leqslant 0$, 则 $p<0$, $|u|^2=-\frac{p}{3}>0$. 从而 $v=\overline{u}$. 设 $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}=u_1,u_2,u_3$, 则我们得到 3 个实根

$$x=u_1+\overline{u_1},\ u_2+\overline{u_2},\ u_3+\overline{u_3}.$$

不难验证, 若有重根则 $\Delta=0$.

第四节　曲线和区域

- 复数表平面曲线
- 区域和闭区域
- 区域的特性

例题：复数方程表圆

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示.

例题：复数方程表圆

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示. 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例题：复数方程表圆

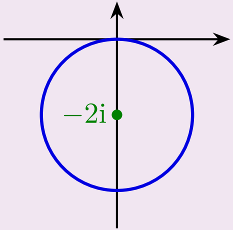
很多的平面图形能用复数形式的方程来表示. 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例. $|z+2\mathrm{i}|=2.$

例题：复数方程表圆

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示. 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例. $|z+2\mathrm{i}|=2$. 该方程表示与 $-2\mathrm{i}$ 的距离为 2 的点全体，即圆心为 $-2\mathrm{i}$ 半径为 2 的圆.

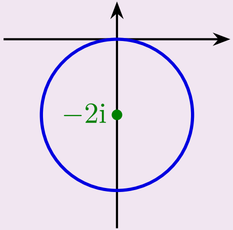


例题：复数方程表圆

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示. 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例. $|z+2\mathrm{i}|=2$. 该方程表示与 $-2\mathrm{i}$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-2\mathrm{i}$ 半径为 2 的圆.

一般的圆方程为 $|z-z_0|=R$, 其中 z_0 是圆心, R 是半径.

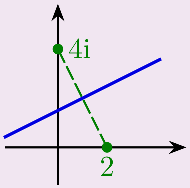


例题：复数方程表直线

例. $|z-4\mathrm{i}| = |z-2|.$

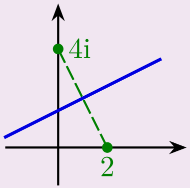
例题：复数方程表直线

例. $|z-4i| = |z-2|$. 该方程表示与 4i 和 2 的距离相等的点，即二者连线的垂直平分线.



例题：复数方程表直线

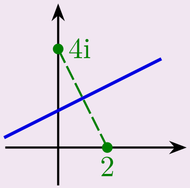
例. $|z-4\mathrm{i}| = |z-2|$. 该方程表示与 $4\mathrm{i}$ 和 2 的距离相等的点，即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 $x-2y+3=0$.



例题：复数方程表直线

例. $|z-4\mathrm{i}| = |z-2|$. 该方程表示与 $4\mathrm{i}$ 和 2 的距离相等的点，即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 $x-2y+3=0$. 该方程也可以表达为

$$(1+2\mathrm{i})z + (1-2\mathrm{i})\overline{z} + 6 = 0.$$



例题：复数方程表椭圆和双曲线

例. $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$

例题：复数方程表椭圆和双曲线

例. $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$

- 当 $2a > |z_1 - z_2|$ 时，该方程表示以 z_1, z_2 为焦点，a 为长半轴的椭圆；

例题：复数方程表椭圆和双曲线

例. $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$

- 当 $2a > |z_1 - z_2|$ 时，该方程表示以 z_1, z_2 为焦点，a 为长半轴的椭圆；
- 当 $2a = |z_1 - z_2|$ 时，该方程表示连接 z_1, z_2 的线段；

例题：复数方程表椭圆和双曲线

例. $|z-z_1|+|z-z_2|=2a.$

- 当 $2a>|z_1-z_2|$ 时，该方程表示以 z_1, z_2 为焦点，a 为长半轴的椭圆；
- 当 $2a=|z_1-z_2|$ 时，该方程表示连接 z_1, z_2 的线段；
- 当 $2a<|z_1-z_2|$ 时，该方程表示空集.

例题：复数方程表椭圆和双曲线

例. $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$.

- 当 $2a>|z_1-z_2|$ 时，该方程表示以 z_1,z_2 为焦点，a 为长半轴的椭圆；
- 当 $2a=|z_1-z_2|$ 时，该方程表示连接 z_1,z_2 的线段；
- 当 $2a<|z_1-z_2|$ 时，该方程表示空集.

例. $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$.

例题：复数方程表椭圆和双曲线

例. $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$.

- 当 $2a > |z_1 - z_2|$ 时，该方程表示以 z_1, z_2 为焦点，a 为长半轴的椭圆；
- 当 $2a = |z_1 - z_2|$ 时，该方程表示连接 z_1, z_2 的线段；
- 当 $2a < |z_1 - z_2|$ 时，该方程表示空集.

例. $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$.

- 当 $2a < |z_1 - z_2|$ 时，该方程表示以 z_1, z_2 为焦点，a 为实半轴的双曲线的一支；

例题：复数方程表椭圆和双曲线

例. $|z-z_1|+|z-z_2|=2a.$

- 当 $2a>|z_1-z_2|$ 时，该方程表示以 z_1,z_2 为焦点，a 为长半轴的椭圆；
- 当 $2a=|z_1-z_2|$ 时，该方程表示连接 z_1,z_2 的线段；
- 当 $2a<|z_1-z_2|$ 时，该方程表示空集.

例. $|z-z_1|-|z-z_2|=2a.$

- 当 $2a<|z_1-z_2|$ 时，该方程表示以 z_1,z_2 为焦点，a 为实半轴的双曲线的一支；
- 当 $2a=|z_1-z_2|$ 时，该方程表示以 z_2 为起点，与 z_2,z_1 连线反向的射线；

例题：复数方程表椭圆和双曲线

例. $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$.

- 当 $2a>|z_1-z_2|$ 时，该方程表示以 z_1, z_2 为焦点，a 为长半轴的椭圆；
- 当 $2a=|z_1-z_2|$ 时，该方程表示连接 z_1, z_2 的线段；
- 当 $2a<|z_1-z_2|$ 时，该方程表示空集.

例. $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$.

- 当 $2a<|z_1-z_2|$ 时，该方程表示以 z_1, z_2 为焦点，a 为实半轴的双曲线的一支；
- 当 $2a=|z_1-z_2|$ 时，该方程表示以 z_2 为起点，与 z_2, z_1 连线反向的射线；
- 当 $2a>|z_1-z_2|$ 时，该方程表示空集.

例题：复数方程表平面图形

练习. $z^2 + \overline{z}^2 = 1$ 和 $z^2 - \overline{z}^2 = \mathrm{i}$ 分别表示什么图形？

例题：复数方程表平面图形

练习. $z^2+\overline{z}^2=1$ 和 $z^2-\overline{z}^2=\mathrm{i}$ 分别表示什么图形？

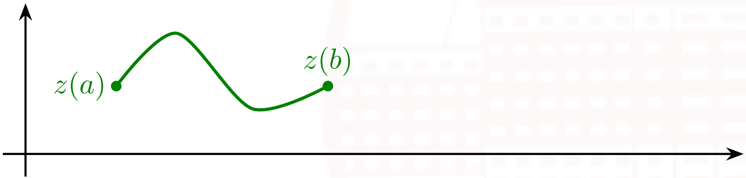
答案. 双曲线 $x^2-y^2=\dfrac{1}{2}$ 和双曲线 $xy=\dfrac{1}{4}$.

设 $x(t), y(t), t \in [a, b]$ 是两个连续函数.

连续曲线、闭路

设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数. 参变量方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]$ 定义了一条**连续曲线**.

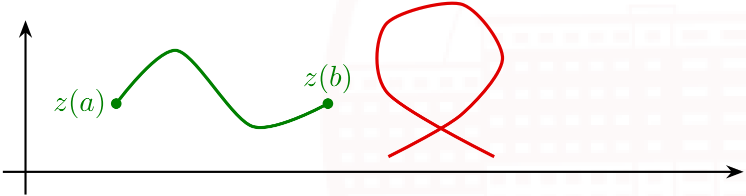
设 $x(t),y(t),t\in[a,b]$ 是两个连续函数. 参变量方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $t\in[a,b]$ 定义了一条**连续曲线**. 这也等价于 $C: z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),t\in[a,b]$.



连续曲线、闭路

设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数. 参变量方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [a,b]$ 定义了一条**连续曲线**. 这也等价于 $C: z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), t \in [a,b]$.

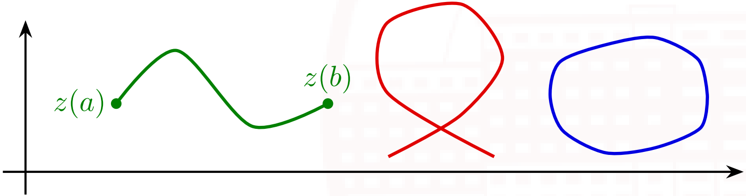
- 若除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是**简单曲线**.



连续曲线、闭路

设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数. 参变量方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [a,b]$ 定义了一条**连续曲线**. 这也等价于 $C: z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), t \in [a,b]$.

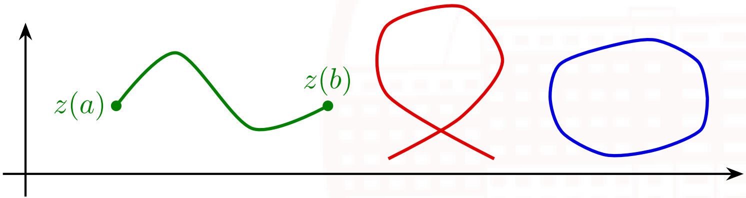
- 若除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是**简单曲线**.
- 若连续曲线 C 满足两个端点重叠, 即 $z(a) = z(b)$, 则称 C 是闭合曲线.



连续曲线、闭路

设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数. 参变量方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]$ 定义了一条连续曲线. 这也等价于 $C: z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), t \in [a,b]$.

- 若除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是简单曲线.
- 若连续曲线 C 满足两个端点重叠, 即 $z(a) = z(b)$, 则称 C 是闭合曲线.
- 称闭合的简单曲线为简单闭曲线或闭路.



例题：连续曲线

例. 圆 $|z-z_0|=R$ 的参数方程：$z=z_0+Re^{\mathrm{i}\theta},\quad \theta\in[0,2\pi]$.

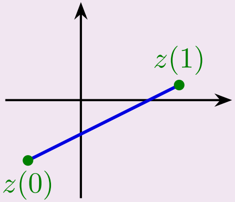
例题：连续曲线

例. 圆 $|z-z_0|=R$ 的参数方程：$z=z_0+Re^{i\theta}, \quad \theta\in[0,2\pi]$.

例. 直线段：

$$z(t)=z_0+(z_1-z_0)t, \quad t\in[0,1],$$

其中 z_0, z_1 为两个端点. 它是简单曲线.



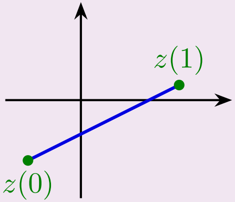
例题：连续曲线

例. 圆 $|z-z_0|=R$ 的参数方程：$z=z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\quad \theta\in[0,2\pi]$.

例. 直线段：

$$z(t)=z_0+(z_1-z_0)t,\quad t\in[0,1],$$

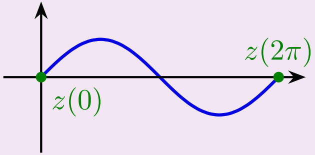
其中 z_0,z_1 为两个端点. 它是简单曲线.



例. 正弦函数曲线段

$$z(t)=\sin t,\quad t\in[0,2\pi]$$

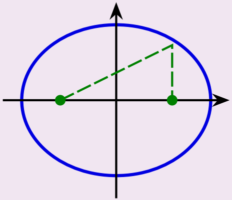
是简单曲线.



例题：连续曲线

例. 椭圆 $|z-\sqrt{5}|+|z+\sqrt{5}|=6$ 的参数方程:

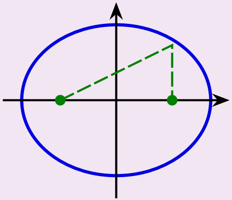
$$z=3\cos\theta+2\mathrm{i}\sin\theta,\quad \theta\in[0,2\pi].$$



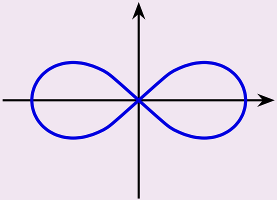
例题：连续曲线

例. 椭圆 $|z-\sqrt{5}|+|z+\sqrt{5}|=6$ 的参数方程:

$$z=3\cos\theta+2i\sin\theta,\quad \theta\in[0,2\pi].$$



例. 双纽线 $|z^2-1|=1$ 是闭合曲线, 但不是闭路.



邻域

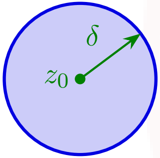
为了引入极限的概念，我们需要考虑点的邻域.

邻域

为了引入极限的概念，我们需要考虑点的邻域. 类比于高等数学中的邻域和去心邻域，我们在复变函数中，称开圆盘

$$U(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$$

为 z_0 的一个 δ-邻域.



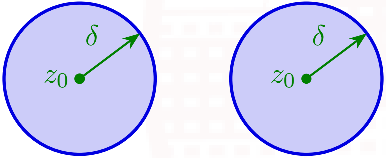
为了引入极限的概念，我们需要考虑点的邻域．类比于高等数学中的邻域和去心邻域，我们在复变函数中，称开圆盘

$$U(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$$

为 z_0 的一个 δ-邻域．称去心开圆盘

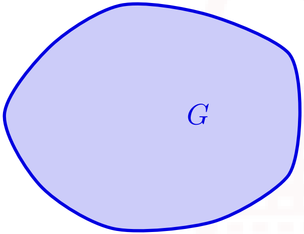
$$\mathring{U}(z_0,\delta)=\{z:0<|z-z_0|<\delta\}$$

为 z_0 的一个去心 δ-邻域．



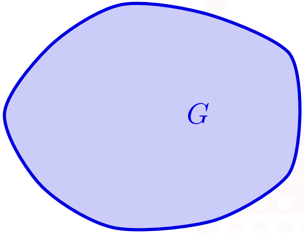
内部、外部、边界

设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$.



内部、外部、边界

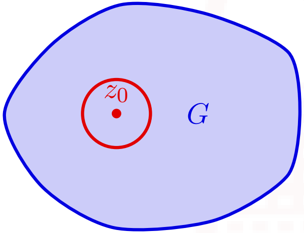
设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:



内部、外部、边界

设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

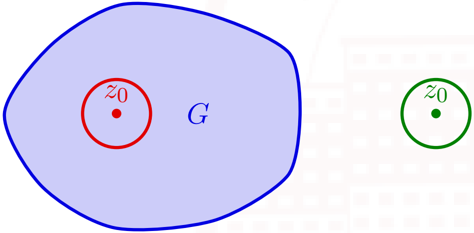


内部、外部、边界

设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个**内点**.

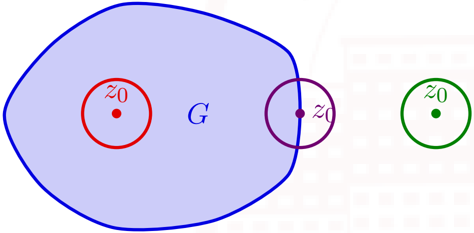
(2) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个**外点**.



内部、外部、边界

设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.
(2) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.
(3) 若 z_0 既不是内点也不是外点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

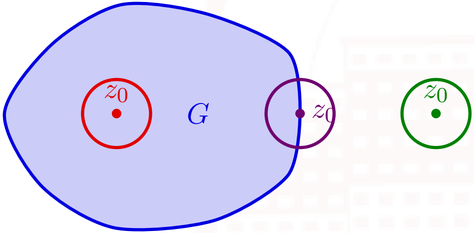


内部、外部、边界

设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个**内点**.
(2) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个**外点**.
(3) 若 z_0 既不是内点也不是外点, 则称 z_0 是 G 的一个**边界点**.

内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能.



内部、外部、边界

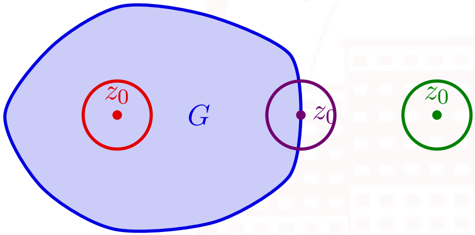
设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个**内点**.

(2) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个**外点**.

(3) 若 z_0 既不是内点也不是外点, 则称 z_0 是 G 的一个**边界点**.

内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.



开集和闭集、有界和无界

定义.

开集和闭集、有界和无界

定义.

(1) 若 G 的所有点都是内点，也就是说，G 的边界点都不属于它，称 G 是一个**开集**.

定义.

(1) 若 G 的所有点都是内点，也就是说，G 的边界点都不属于它，称 G 是一个开集.

(2) 若 G 的所有边界点都属于 G，称 G 是一个闭集.

定义.
(1) 若 G 的所有点都是内点，也就是说，G 的边界点都不属于它，称 G 是一个开集.
(2) 若 G 的所有边界点都属于 G，称 G 是一个闭集.

G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集.

定义.
(1) 若 G 的所有点都是内点，也就是说，G 的边界点都不属于它，称 G 是一个开集.
(2) 若 G 的所有边界点都属于 G，称 G 是一个闭集.

G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集.

例如

$$|z-z_0|<R,\quad 1<\operatorname{Re} z<3,\quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集.

定义.

(1) 若 G 的所有点都是内点，也就是说，G 的边界点都不属于它，称 G 是一个**开集**.

(2) 若 G 的所有边界点都属于 G，称 G 是一个**闭集**.

G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集.

例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 直观上看: 开集往往由 $>, <$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant, \leqslant$ 的不等式给出.

定义.

(1) 若 G 的所有点都是内点，也就是说，G 的边界点都不属于它，称 G 是一个开集.

(2) 若 G 的所有边界点都属于 G，称 G 是一个闭集.

G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集.

例如

$$|z-z_0|<R,\quad 1<\operatorname{Re}z<3,\quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 直观上看: 开集往往由 $>,<$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant,\leqslant$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

定义.

(1) 若 G 的所有点都是内点，也就是说，G 的边界点都不属于它，称 G 是一个开集.

(2) 若 G 的所有边界点都属于 G，称 G 是一个闭集.

G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集.

例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 直观上看: 开集往往由 $>, <$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant, \leqslant$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

若 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0, R)$ 中, 则称它是有界的.

定义.

(1) 若 G 的所有点都是内点，也就是说，G 的边界点都不属于它，称 G 是一个开集.

(2) 若 G 的所有边界点都属于 G，称 G 是一个闭集.

G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集.

例如

$$|z-z_0|<R, \quad 1<\operatorname{Re} z<3, \quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 直观上看: 开集往往由 $>,<$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant,\leqslant$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

若 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0,R)$ 中, 则称它是有界的. 否则称它是无界的.

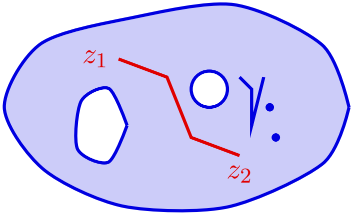
定义. 若开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个**区域**.

区域和闭区域

定义. 若开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个**区域**. 也就是说，区域是连通的开集.

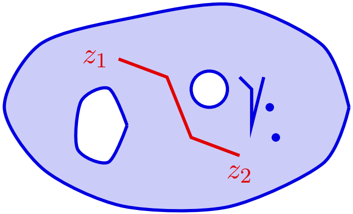
定义. 若开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个**区域**. 也就是说，区域是连通的开集.

观察右侧图案, 阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接, 因此它是一个区域.



定义. 若开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个**区域**. 也就是说，区域是连通的开集.

观察右侧图案，阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接，因此它是一个区域. 这些线条和点构成了它的边界.

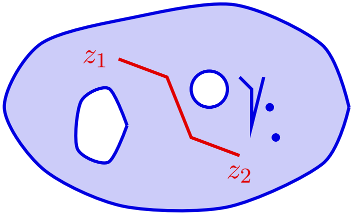


区域和闭区域

定义. 若开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个**区域**. 也就是说，区域是连通的开集.

观察右侧图案，阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接，因此它是一个区域. 这些线条和点构成了它的边界.

区域和它的边界一起构成了**闭区域**，记作 $\overline{D}$.

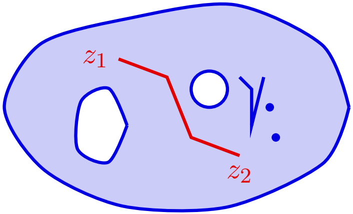


区域和闭区域

定义. 若开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个**区域**. 也就是说，区域是连通的开集.

观察右侧图案，阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接，因此它是一个区域. 这些线条和点构成了它的边界.

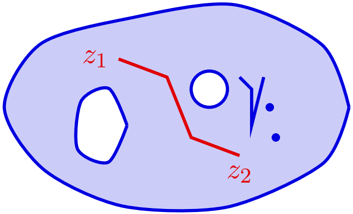
区域和它的边界一起构成了**闭区域**，记作 $\overline{D}$. 它是一个闭集.



定义. 若开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个**区域**. 也就是说, 区域是连通的开集.

观察右侧图案, 阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接, 因此它是一个区域. 这些线条和点构成了它的边界.

区域和它的边界一起构成了**闭区域**, 记作 $\overline{D}$. 它是一个闭集.

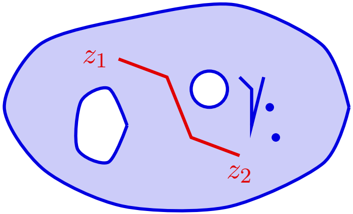


注意数学中边界的概念与日常所说的边界是两码事.

定义. 若开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个**区域**. 也就是说，区域是连通的开集.

观察右侧图案，阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接，因此它是一个区域. 这些线条和点构成了它的边界.

区域和它的边界一起构成了**闭区域**，记作 $\overline{D}$. 它是一个闭集.



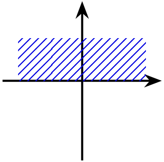
注意数学中边界的概念与日常所说的边界是两码事. 例如区域 $|z|>1$ 的边界是 $|z|=1$，其闭区域是 $|z|\geqslant 1$.

常见区域

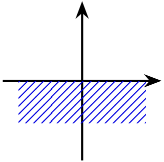
很多区域可以由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

常见区域

很多区域可以由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.



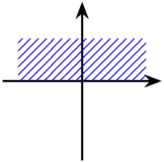
上半平面
$\operatorname{Im} z > 0$



下半平面
$\operatorname{Im} z < 0$

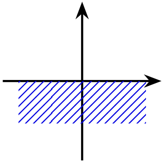
常见区域

很多区域可以由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.



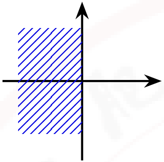
上半平面

$\operatorname{Im} z > 0$



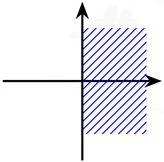
下半平面

$\operatorname{Im} z < 0$



左半平面

$\operatorname{Re} z < 0$

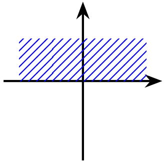


右半平面

$\operatorname{Re} z > 0$

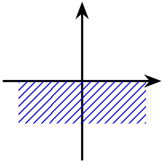
常见区域

很多区域可以由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.



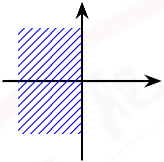
上半平面

$\operatorname{Im} z > 0$



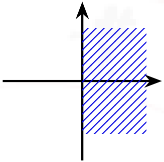
下半平面

$\operatorname{Im} z < 0$



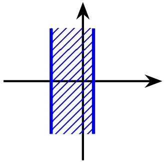
左半平面

$\operatorname{Re} z < 0$



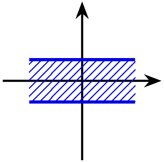
右半平面

$\operatorname{Re} z > 0$



竖直带状区域

$x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$

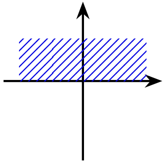


水平带状区域

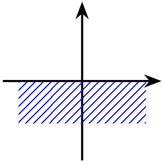
$y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$

常见区域

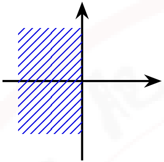
很多区域可以由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.



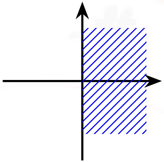
上半平面
$\operatorname{Im} z > 0$



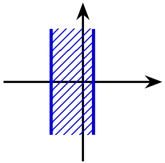
下半平面
$\operatorname{Im} z < 0$



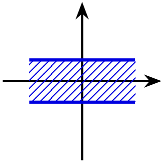
左半平面
$\operatorname{Re} z < 0$



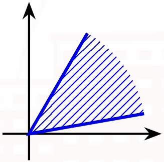
右半平面
$\operatorname{Re} z > 0$



竖直带状区域
$x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$



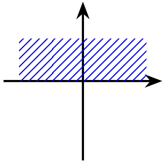
水平带状区域
$y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$



角状区域
$\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$

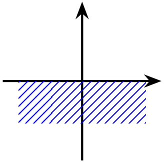
常见区域

很多区域可以由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.



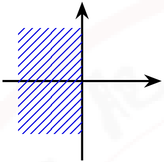
上半平面

$\operatorname{Im} z > 0$



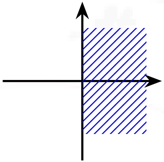
下半平面

$\operatorname{Im} z < 0$



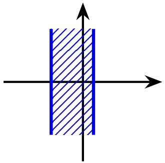
左半平面

$\operatorname{Re} z < 0$



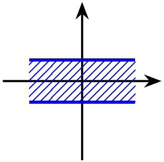
右半平面

$\operatorname{Re} z > 0$



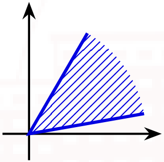
竖直带状区域

$x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$



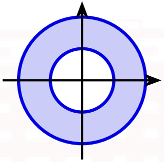
水平带状区域

$y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$



角状区域

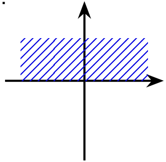
$\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$



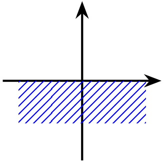
圆环域

$r < |z| < R$

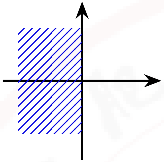
很多区域可以由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定. 下方区域对应的闭区域是什么?



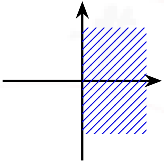
上半平面
$\operatorname{Im} z > 0$



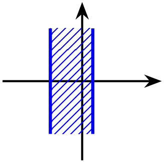
下半平面
$\operatorname{Im} z < 0$



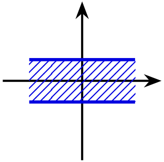
左半平面
$\operatorname{Re} z < 0$



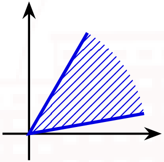
右半平面
$\operatorname{Re} z > 0$



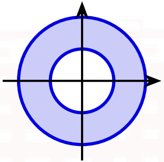
竖直带状区域
$x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$



水平带状区域
$y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$

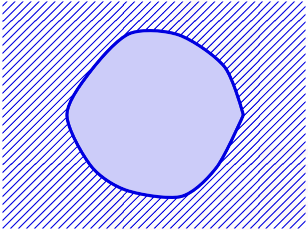


角状区域
$\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$



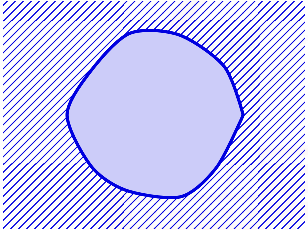
圆环域
$r < |z| < R$

闭路 C 把复平面划分成了两个区域，一个有界一个无界.



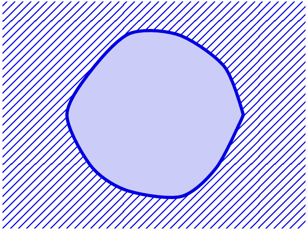
闭路的内部和外部

闭路 C 把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界. 分别称这两个区域是 C 的内部和外部.



闭路的内部和外部

闭路 C 把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界. 分别称这两个区域是 C 的内部和外部. C 是它们的公共边界.



单连通区域和多连通区域

在前面所说的几个常见区域的例子中，我们在区域中画一条闭路.

在前面所说的几个常见区域的例子中，我们在区域中画一条闭路．除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内．

单连通区域和多连通区域

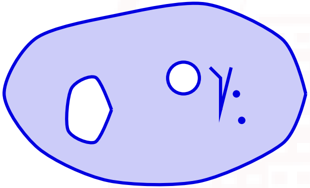
在前面所说的几个常见区域的例子中，我们在区域中画一条闭路．除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内．

定义． 若区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中，则称 D 是**单连通区域**．否则称之为**多连通区域**．

在前面所说的几个常见区域的例子中，我们在区域中画一条闭路．除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内．

定义． 若区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中，则称 D 是**单连通区域**．否则称之为**多连通区域**．

单连通区域内的任一闭路可以“连续地变形”成一个点．

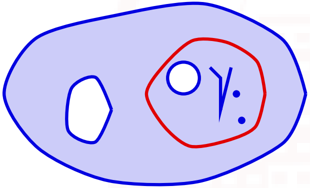


单连通区域和多连通区域

在前面所说的几个常见区域的例子中，我们在区域中画一条闭路．除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内．

定义． 若区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中，则称 D 是**单连通区域**．否则称之为**多连通区域**．

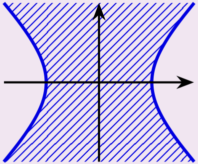
单连通区域内的任一闭路可以"连续地变形"成一个点．这也等价于：设 ℓ_0, ℓ_1 是从 A 到 B 的两条连续曲线，则 ℓ_0 可以连续地变形为 ℓ_1 且保持端点不动．



例. $\mathrm{Re}(z^2) < 1.$

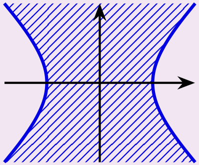
典型例题：区域的特性

例. $\mathrm{Re}(z^2)<1$. 设 $z=x+y\mathrm{i}$, 则 $\mathrm{Re}(z^2)=x^2-y^2<1$.

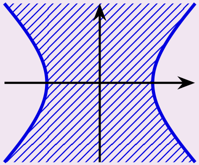


典型例题：区域的特性

例. $\mathrm{Re}(z^2) < 1$. 设 $z = x + y\mathrm{i}$, 则 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$. 这是无界的单连通区域.



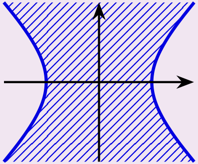
例. $\mathrm{Re}(z^2) < 1$. 设 $z = x + y\mathrm{i}$, 则 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$. 这是无界的单连通区域.



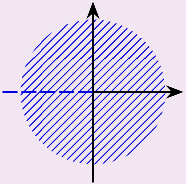
例. $\arg z \neq \pi$.

典型例题：区域的特性

例. $\operatorname{Re}(z^2) < 1$. 设 $z = x + yi$, 则 $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$. 这是无界的单连通区域.

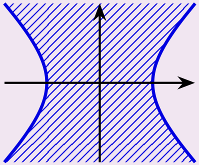


例. $\arg z \neq \pi$. 即角状区域 $-\pi < \arg z < \pi$.

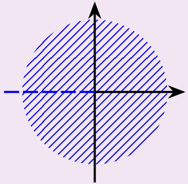


典型例题：区域的特性

例. $\mathrm{Re}(z^2) < 1$. 设 $z = x + yi$, 则 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$. 这是无界的单连通区域.



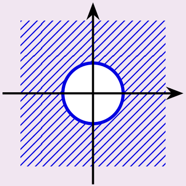
例. $\arg z \neq \pi$. 即角状区域 $-\pi < \arg z < \pi$. 这是无界的单连通区域.



例. $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant 3.$

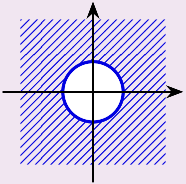
典型例题：区域的特性

例. $\left|\frac{1}{z}\right| \leqslant 3$. 即 $|z| \geqslant \frac{1}{3}$.



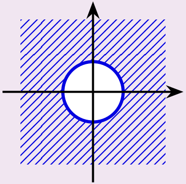
典型例题：区域的特性

例. $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant 3$. 即 $|z| \geqslant \dfrac{1}{3}$. 这是无界的多连通闭区域.



典型例题：区域的特性

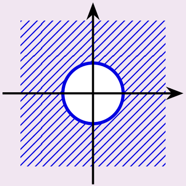
例. $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant 3$. 即 $|z| \geqslant \dfrac{1}{3}$. 这是无界的多连通闭区域.



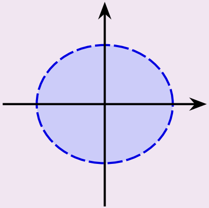
例. $|z+1|+|z-1|<4$.

典型例题：区域的特性

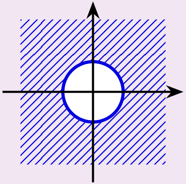
例. $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant 3$. 即 $|z| \geqslant \dfrac{1}{3}$. 这是无界的多连通闭区域.



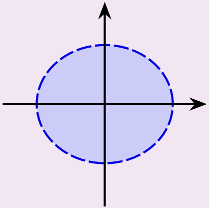
例. $|z+1|+|z-1|<4$. 表示一个椭圆的内部.



例. $\left|\frac{1}{z}\right| \leqslant 3$. 即 $|z| \geqslant \frac{1}{3}$. 这是无界的多连通闭区域.

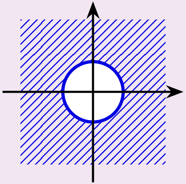


例. $|z+1|+|z-1|<4$. 表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通区域.

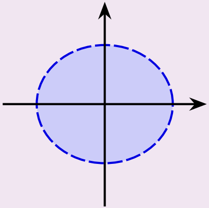


典型例题：区域的特性

例. $\left|\frac{1}{z}\right| \leqslant 3$. 即 $|z| \geqslant \frac{1}{3}$. 这是无界的多连通闭区域.



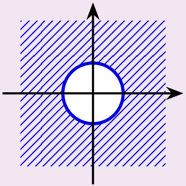
例. $|z+1|+|z-1|<4$. 表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通区域.



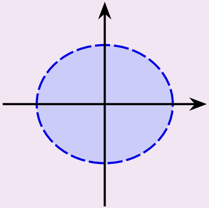
练习. $|z+1|+|z-1| \geqslant 1$ 表示什么集合?

典型例题：区域的特性

例. $\left|\frac{1}{z}\right| \leqslant 3$. 即 $|z| \geqslant \frac{1}{3}$. 这是无界的多连通闭区域.



例. $|z+1|+|z-1|<4$. 表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通区域.



练习. $|z+1|+|z-1| \geqslant 1$ 表示什么集合? 整个复平面.

第五节　复变函数

- 复变函数的定义
- 复平面的变换

所谓的**映射**, 就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

复变函数的定义

所谓的**映射**, 就是两个集合之间的一种对应 $f : A \to B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

(1) 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.

复变函数的定义

所谓的**映射**, 就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

(1) 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.

(2) 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个**复变函数**.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

(1) 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.

(2) 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例. $f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n$ (n 为整数), $\dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

复变函数的定义

所谓的映射, 就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

(1) 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.

(2) 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个复变函数.

例. $f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n$ (n 为整数), $\dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义. 称 A 为函数 f 的定义域,

所谓的**映射**, 就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

(1) 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.

(2) 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个**复变函数**.

例. $f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n$ (n 为整数), $\dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义. 称 A 为函数 f 的**定义域**, 称 $\{w = f(z) \mid z \in A\}$ 为它的**值域**.

复变函数的定义

所谓的**映射**, 就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

(1) 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.

(2) 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个**复变函数**.

例. $f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n$ (n 为整数), $\dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义. 称 A 为函数 f 的**定义域**, 称 $\{w = f(z) \mid z \in A\}$ 为它的**值域**.

上述函数的定义域和值域分别是什么?

在复变函数理论中，我们常常会遇到**多值的复变函数**，也就是说一个 $z \in A$ 可能有多个 w 与之对应.

在复变函数理论中, 我们常常会遇到多值的复变函数, 也就是说一个 $z \in A$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in A$ 可能有多个 w 与之对应．例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等．

为了方便研究，我们常常需要对每一个 z，选取固定的一个 $f(z)$ 的值．

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到**多值的复变函数**，也就是说一个 $z \in A$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.

为了方便研究，我们常常需要对每一个 z，选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个**单值分支**.

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in A$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.

为了方便研究，我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例. $\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

多值复变函数

在复变函数理论中, 我们常常会遇到**多值的复变函数**, 也就是说一个 $z \in A$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.

为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个**单值分支**.

例. $\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数.

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in A$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\mathrm{Arg}\, z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.

为了方便研究，我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例. $\arg z$ 是无穷多值函数 $\mathrm{Arg}\, z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数. 若 f 和 f^{-1} 都是单值的，则称 f 是一一对应.

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到**多值的复变函数**，也就是说一个 $z \in A$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.

为了方便研究，我们常常需要对每一个 z，选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个**单值分支**.

例. $\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数. 若 f 和 f^{-1} 都是单值的，则称 f 是**一一对应**.

例. $f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$.

多值复变函数

在复变函数理论中, 我们常常会遇到**多值的复变函数**, 也就是说一个 $z \in A$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.

为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个**单值分支**.

例. $\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数. 若 f 和 f^{-1} 都是单值的, 则称 f 是**一一对应**.

例. $f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$. 当 $n = \pm 1$ 时, f 是一一对应.

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in A$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.

为了方便研究，我们常常需要对每一个 z，选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例. $\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数. 若 f 和 f^{-1} 都是单值的，则称 f 是一一对应.

例. $f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$. 当 $n = \pm 1$ 时，f 是一一对应.

若无特别声明，本课程中复变函数总是指单值的复变函数.

变换

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来.

变换

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的变换 (也叫映射、映照) 来表示这种对应关系.

变换

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的变换 (也叫映射、映照) 来表示这种对应关系. 注意到 w 的实部和虚部可以看作 z 的实部和虚部的函数, 即

$$w = u + \mathrm{i}v = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

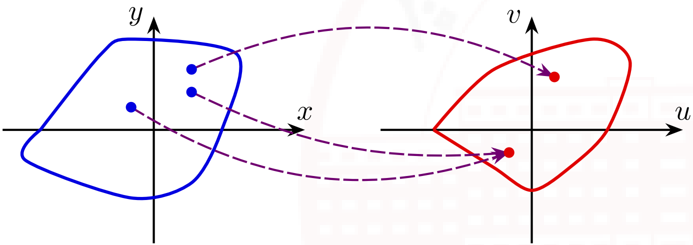
的实部和虚部是两个二元实变函数.

变换

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的变换 (也叫映射、映照) 来表示这种对应关系. 注意到 w 的实部和虚部可以看作 z 的实部和虚部的函数, 即

$$w = u + \mathrm{i}v = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$$

的实部和虚部是两个二元实变函数.



z 复平面　　w 复平面

例题：翻转变换

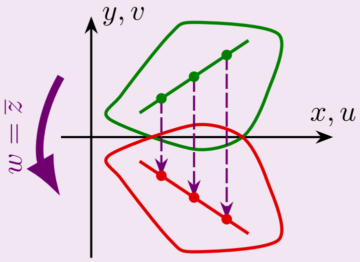
例. 函数 $w = \overline{z}$.

例题：翻转变换

例. 函数 $w = \overline{z}$. 若把 z 复平面和 w 复平面重叠放置，则这个变换是关于 z 轴的翻转变换.

例题：翻转变换

例. 函数 $w=\overline{z}$. 若把 z 复平面和 w 复平面重叠放置，则这个变换是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域，且 $u=x, v=-y$.



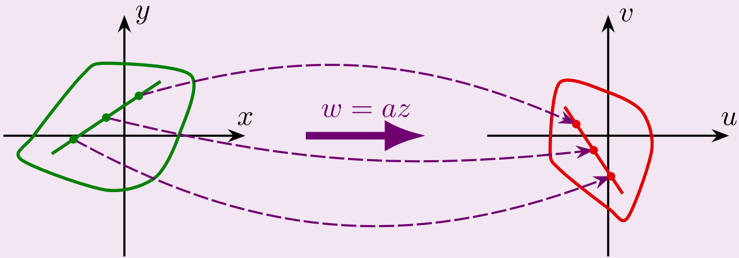
z, w 平面重叠

例题：旋转和相似变换

例. 函数 $w = az$.

例. 函数 $w = az$. 设 $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则这个变换是一个旋转变换 (逆时针旋转 θ) 和一个相似变换 (放大为 r 倍) 的复合.

例. 函数 $w = az$. 设 $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则这个变换是一个旋转变换 (逆时针旋转 θ) 和一个相似变换 (放大为 r 倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.



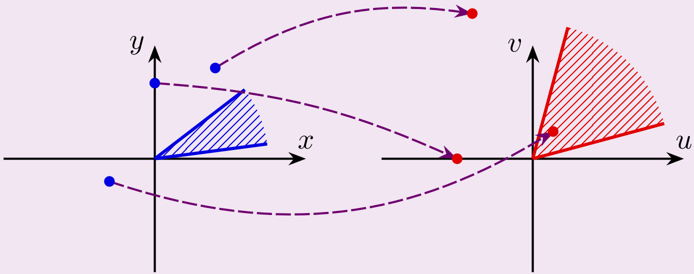
例题：平方变换

例. 函数 $w = z^2$.

例题：平方变换

例. 函数 $w = z^2$. 这个变换把 z 的辐角增大一倍，因此它会把角形区域变换为角形区域，并将夹角放大一倍.

例. 函数 $w = z^2$. 这个变换把 z 的辐角增大一倍，因此它会把角形区域变换为角形区域，并将夹角放大一倍.



例题：平方变换

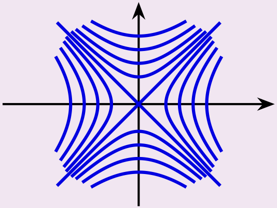
由于 $u = x^2 - y^2, v = 2xy.$

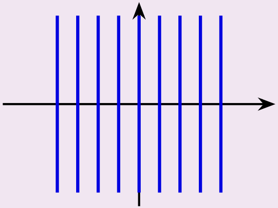
例题：平方变换

由于 $u=x^2-y^2, v=2xy$. 因此它把 z 复平面上以直线 $y=\pm x$ 为渐近线的等轴双曲线 $x^2-y^2=c_1$ 变换为 w 复平面上的直线 $u=c_1$,

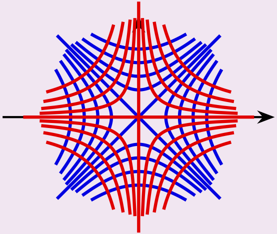
例题：平方变换

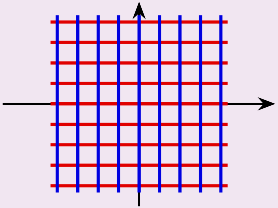
由于 $u = x^2 - y^2, v = 2xy$. 因此它把 z 复平面上以直线 $y = \pm x$ 为渐近线的等轴双曲线 $x^2 - y^2 = c_1$ 变换为 w 复平面上的直线 $u = c_1$, 把 z 复平面上以坐标轴为渐近线的等轴双曲线 $2xy = c_2$ 变换为 w 复平面上的直线 $v = c_2$.





由于 $u = x^2 - y^2, v = 2xy$. 因此它把 z 复平面上以直线 $y = \pm x$ 为渐近线的等轴双曲线 $x^2 - y^2 = c_1$ 变换为 w 复平面上的直线 $u = c_1$, 把 z 复平面上以坐标轴为渐近线的等轴双曲线 $2xy = c_2$ 变换为 w 复平面上的直线 $v = c_2$.





例题：变换的像

例. 求线段 $0 < |z| < 3, \arg z = \dfrac{\pi}{4}$ 在变换 $w = z^2$ 下的像.

例题：变换的像

例. 求线段 $0 < |z| < 3, \arg z = \dfrac{\pi}{4}$ 在变换 $w = z^2$ 下的像.

解答. 设 $z = re^{\frac{\pi i}{4}}$, 则 $w = z^2 = r^2 e^{\frac{\pi i}{2}} = ir^2$.

例题：变换的像

例. 求线段 $0<|z|<3, \arg z=\dfrac{\pi}{4}$ 在变换 $w=z^2$ 下的像.

解答. 设 $z=re^{\frac{\pi i}{4}}$, 则 $w=z^2=r^2e^{\frac{\pi i}{2}}=ir^2$. 因此它的像是连接 0 和 9i 的线段:

$$0<|w|<9, \quad \arg w=\frac{\pi}{2}.$$

例题：变换的像

例. 求线段 $0<|z|<3, \arg z=\dfrac{\pi}{4}$ 在变换 $w=z^2$ 下的像.

解答. 设 $z=r\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}$, 则 $w=z^2=r^2\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}}=\mathrm{i}r^2$. 因此它的像是连接 0 和 $9\mathrm{i}$ 的线段:

$$0<|w|<9, \quad \arg w=\frac{\pi}{2}.$$

例. 求双曲线 $x^2-y^2=2$ 在变换 $w=z^2$ 下的像.

例题：变换的像

例. 求线段 $0<|z|<3, \arg z=\dfrac{\pi}{4}$ 在变换 $w=z^2$ 下的像.

解答. 设 $z=r\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}$, 则 $w=z^2=r^2\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}}=\mathrm{i}r^2$. 因此它的像是连接 0 和 9i 的线段:

$$0<|w|<9, \quad \arg w=\frac{\pi}{2}.$$

例. 求双曲线 $x^2-y^2=2$ 在变换 $w=z^2$ 下的像.

解答. 由于

$$w=u+\mathrm{i}v=z^2=(x^2-y^2)+2xy\mathrm{i}.$$

例题：变换的像

例. 求线段 $0<|z|<3, \arg z=\dfrac{\pi}{4}$ 在变换 $w=z^2$ 下的像.

解答. 设 $z=re^{\frac{\pi i}{4}}$, 则 $w=z^2=r^2e^{\frac{\pi i}{2}}=ir^2$. 因此它的像是连接 0 和 9i 的线段:

$$0<|w|<9, \quad \arg w=\frac{\pi}{2}.$$

例. 求双曲线 $x^2-y^2=2$ 在变换 $w=z^2$ 下的像.

解答. 由于

$$w=u+iv=z^2=(x^2-y^2)+2xyi.$$

因此 $u=x^2-y^2=2$.

例题：变换的像

例. 求线段 $0<|z|<3, \arg z=\dfrac{\pi}{4}$ 在变换 $w=z^2$ 下的像.

解答. 设 $z=re^{\frac{\pi i}{4}}$, 则 $w=z^2=r^2e^{\frac{\pi i}{2}}=ir^2$. 因此它的像是连接 0 和 9i 的线段:

$$0<|w|<9, \quad \arg w=\frac{\pi}{2}.$$

例. 求双曲线 $x^2-y^2=2$ 在变换 $w=z^2$ 下的像.

解答. 由于

$$w=u+iv=z^2=(x^2-y^2)+2xyi.$$

因此 $u=x^2-y^2=2$. 由于任意 $2+iv$ 均存在平方根, 因此所求的像就是直线 $\operatorname{Re} w=2$.

例题：变换的像

例. 求扇形区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}, 0 < |z| < 2$ 在变换 $w = z^2$ 下的像.

例题：变换的像

例. 求扇形区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}, 0 < |z| < 2$ 在变换 $w = z^2$ 下的像.

解答. 设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $w = r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$.

例题：变换的像

例. 求扇形区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}, 0 < |z| < 2$ 在变换 $w = z^2$ 下的像.

解答. 设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2e^{2i\theta}$. 因此它的像是扇形区域

$$0 < \arg w < \frac{2\pi}{3}, \quad 0 < |w| < 4.$$

例题：变换的像

例. 求圆周 $|z|=2$ 在映射 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

例题：变换的像

例. 求圆周 $|z|=2$ 在映射 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解答. 不难看出 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$.

例题：变换的像

例. 求圆周 $|z|=2$ 在映射 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解答. 不难看出 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$. 由 $\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right|=2$ 可知 $|w+1|=2|w-1|$.

例. 求圆周 $|z|=2$ 在映射 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解答. 不难看出 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$. 由 $\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right|=2$ 可知 $|w+1|=2|w-1|$. 从而

$$w\overline{w}+w+\overline{w}+1=4w\overline{w}-4w-4\overline{w}+4.$$

例题：变换的像

例. 求圆周 $|z|=2$ 在映射 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解答. 不难看出 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$. 由 $\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right|=2$ 可知 $|w+1|=2|w-1|$. 从而

$$w\overline{w}+w+\overline{w}+1=4w\overline{w}-4w-4\overline{w}+4.$$

$$w\overline{w}-\frac{5}{3}w-\frac{5}{3}\overline{w}+1=0.$$

例题：变换的像

例. 求圆周 $|z|=2$ 在映射 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解答. 不难看出 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$. 由 $\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right|=2$ 可知 $|w+1|=2|w-1|$. 从而

$$w\overline{w}+w+\overline{w}+1=4w\overline{w}-4w-4\overline{w}+4.$$

$$w\overline{w}-\frac{5}{3}w-\frac{5}{3}\overline{w}+1=0.$$

于是 $\left|w-\dfrac{5}{3}\right|^2=\dfrac{16}{9}$, 即 $\left|w-\dfrac{5}{3}\right|=\dfrac{4}{3}$, 它是一个圆周.

例题：变换的像

形如

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

的映射叫作**分式线性映射**，其中 $ad \neq bc$.

形如

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

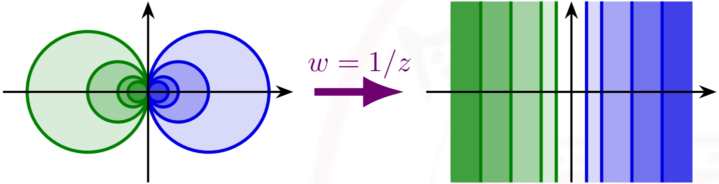
的映射叫作**分式线性映射**，其中 $ad\neq bc$. 它总把直线和圆映成直线或圆.

例题：变换的像

形如

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

的映射叫作**分式线性映射**，其中 $ad\neq bc$. 它总把直线和圆映成直线或圆.

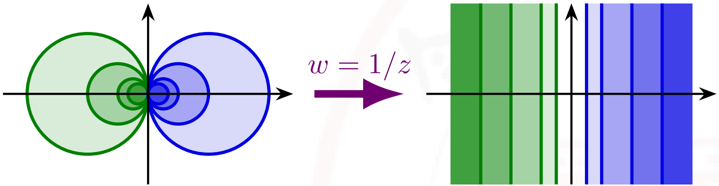


例题：变换的像

形如

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

的映射叫作**分式线性映射**，其中 $ad\neq bc$. 它总把直线和圆映成直线或圆.



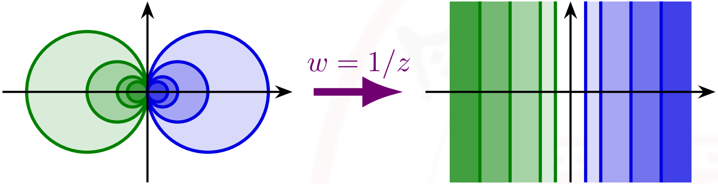
练习. 直线在分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 下的像一定经过复数______.

例题：变换的像

形如

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

的映射叫作**分式线性映射**，其中 $ad \neq bc$. 它总把直线和圆映成直线或圆.



练习. 直线在分式线性映射 $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 下的像一定经过复数 $\underline{\quad \dfrac{a}{c} \quad}$.

第六节　极限和连续性

- 数列的极限
- 无穷远点和复球面
- 函数的极限
- 函数的连续性

类似于实数的情形，我们可以定义复数列和复变函数的极限.

类似于实数的情形，我们可以定义复数列和复变函数的极限.

我们先来看数列极限的定义.

类似于实数的情形, 我们可以定义复数列和复变函数的极限.

我们先来看数列极限的定义.

定义. 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列.

类似于实数的情形, 我们可以定义复数列和复变函数的极限.

我们先来看数列极限的定义.

定义. 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 若存在复数 z 满足对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是**数列 $\{z_n\}$ 的极限**, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

类似于实数的情形, 我们可以定义复数列和复变函数的极限.

我们先来看数列极限的定义.

定义. 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 若存在复数 z 满足对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

此时称极限存在或数列收敛.

类似于实数的情形, 我们可以定义复数列和复变函数的极限.

我们先来看数列极限的定义.

定义. 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 若存在复数 z 满足对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

此时称极限存在或数列收敛. 若不存在这样的 z, 则称极限不存在或数列发散.

类似于实数的情形，我们可以定义复数列和复变函数的极限.

我们先来看数列极限的定义.

定义. 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 若存在复数 z 满足对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

此时称极限存在或数列收敛. 若不存在这样的 z, 则称极限不存在或数列发散.

可以看出, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ 等价于实极限 $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$.

由于复数列极限的定义和实数列极限的定义在形式上完全相同,

由于复数列极限的定义和实数列极限的定义在形式上完全相同, 因此类似地, 极限的四则运算法则对于复数列也是成立的.

由于复数列极限的定义和实数列极限的定义在形式上完全相同，因此类似地，极限的四则运算法则对于复数列也是成立的.

定理. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$，则

由于复数列极限的定义和实数列极限的定义在形式上完全相同，因此类似地，极限的四则运算法则对于复数列也是成立的.

定理. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = z \pm w$;

由于复数列极限的定义和实数列极限的定义在形式上完全相同，因此类似地，极限的四则运算法则对于复数列也是成立的.

定理. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n w_n = zw$；

由于复数列极限的定义和实数列极限的定义在形式上完全相同，因此类似地，极限的四则运算法则对于复数列也是成立的.

定理. 设 $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, $\lim_{n\to\infty} w_n = w$，则

(1) $\lim_{n\to\infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w$；

(2) $\lim_{n\to\infty} z_n w_n = zw$；

(3) 当 $w \neq 0$ 时，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{z}{w}$.

数列收敛的等价刻画

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定方法来研究复数列的敛散性.

数列收敛的等价刻画

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定方法来研究复数列的敛散性.

定理. 设 $z_n = x_n + y_n\mathrm{i}, z = x + y\mathrm{i}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定方法来研究复数列的敛散性.

定理. 设 $z_n = x_n + y_n\mathrm{i}, z = x + y\mathrm{i}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

证明. 我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = \lim_{n\to\infty} |y_n - y| = 0.$$

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定方法来研究复数列的敛散性.

定理. 设 $z_n = x_n + y_n\mathrm{i}, z = x + y\mathrm{i}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

证明. 我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = \lim_{n\to\infty} |y_n - y| = 0.$$

"$\Rightarrow$": 由三角不等式 $0 \leqslant |x_n - x|, |y_n - y| \leqslant |z_n - z|$ 和夹逼准则可得知.

数列收敛的等价刻画

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定方法来研究复数列的敛散性.

定理. 设 $z_n = x_n + y_n\mathrm{i}, z = x + y\mathrm{i}$，则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

证明. 我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = \lim_{n\to\infty} |y_n - y| = 0.$$

"$\Rightarrow$": 由三角不等式 $0 \leqslant |x_n - x|, |y_n - y| \leqslant |z_n - z|$ 和夹逼准则可得知.

"$\Leftarrow$": 由极限的四则运算法则可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \big(|x_n - x| + |y_n - y|\big) = 0.$

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定方法来研究复数列的敛散性.

定理. 设 $z_n = x_n + y_n\mathrm{i}, z = x + y\mathrm{i}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

证明. 我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = \lim_{n\to\infty} |y_n - y| = 0.$$

"$\Rightarrow$": 由三角不等式 $0 \leqslant |x_n - x|, |y_n - y| \leqslant |z_n - z|$ 和夹逼准则可得知.
"$\Leftarrow$": 由极限的四则运算法则可知 $\lim_{n\to\infty} (|x_n - x| + |y_n - y|) = 0$. 再由三角不等式 $0 \leqslant |z_n - z| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|$ 和夹逼准则可得. □

例题：数列的敛散性

例. 设 $z_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛？

例题：数列的敛散性

例. 设 $z_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)e^{\frac{\pi i}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

解答. 由于

$$x_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}\to 1,\quad y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}\to 0.$$

例题：数列的敛散性

例. 设 $z_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)e^{\frac{\pi i}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛？

解答. 由于

$$x_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}\to 1,\quad y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}\to 0.$$

因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=1$.

数列极限的等价定义

数列极限的定义可以用邻域的语言重新表述为:

数列极限的等价定义

数列极限的定义可以用邻域的语言重新表述为:

定义. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ 是指: 对 z 的任意 δ 邻域 U, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $z_n \in U$.

数列极限的定义可以用邻域的语言重新表述为:

定义. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ **是指: 对** z **的任意** δ **邻域** U**, 存在** N **使得当** $n \geqslant N$ **时,** $z_n \in U$**.**

若 $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$, 我们将其记为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

数列极限的等价定义

数列极限的定义可以用邻域的语言重新表述为:

定义. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ **是指: 对** z **的任意** δ **邻域** U**, 存在** N **使得当** $n \geqslant N$ **时,** $z_n \in U$**.**

若 $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$, 我们将其记为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. 这也等价于: 对任意 $X > 0$, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $|z_n| > X$.

数列极限的定义可以用邻域的语言重新表述为:

定义. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ **是指: 对** z **的任意** δ **邻域** U**, 存在** N **使得当** $n \geqslant N$ **时,** $z_n \in U$**.**

若 $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$, 我们将其记为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. 这也等价于: 对任意 $X > 0$, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $|z_n| > X$.

我们能不能也用邻域的语言来描述 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ 呢?

数列极限的定义可以用邻域的语言重新表述为:

定义. $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ **是指: 对** z **的任意** δ **邻域** U**, 存在** N **使得当** $n \geqslant N$ **时,** $z_n \in U$**.**

若 $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$, 我们将其记为 $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. 这也等价于: 对任意 $X > 0$, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $|z_n| > X$.

我们能不能也用邻域的语言来描述 $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ 呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示方式且自然地包含无穷远点 ∞.

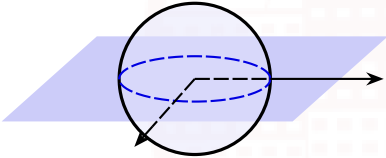
数列极限的定义可以用邻域的语言重新表述为:

定义. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ **是指: 对** z **的任意** δ **邻域** U**, 存在** N **使得当** $n \geqslant N$ **时,** $z_n \in U$**.**

若 $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$, 我们将其记为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. 这也等价于: 对任意 $X > 0$, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $|z_n| > X$.

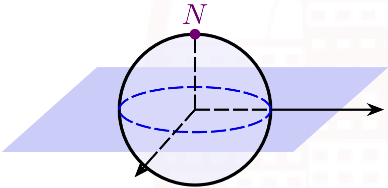
我们能不能也用邻域的语言来描述 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ 呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示方式且自然地包含无穷远点 ∞. 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

取一个球心在 $z=0$ 的单位球面.



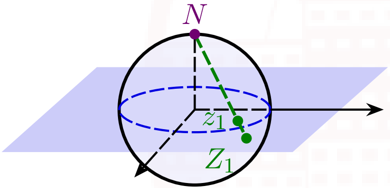
复球面

取一个球心在 $z=0$ 的单位球面. 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于其中一点 N, 称之为北极.



取一个球心在 $z=0$ 的单位球面. 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于其中一点 N, 称之为北极.

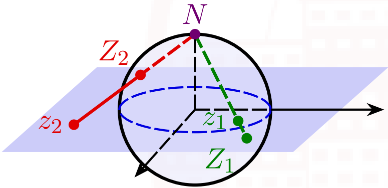
- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.



复球面

取一个球心在 $z=0$ 的单位球面. 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于其中一点 N, 称之为北极.

- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.

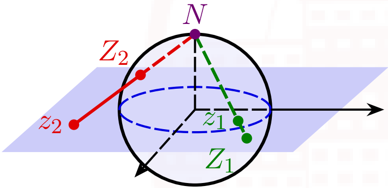


复球面

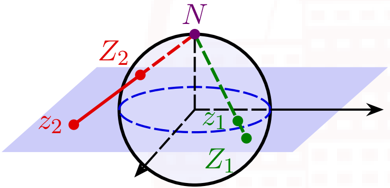
取一个球心在 $z=0$ 的单位球面. 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于其中一点 N, 称之为北极.

- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.

这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了一一对应.

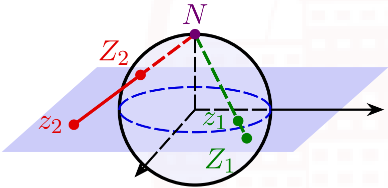


当 $|z|$ 越来越大时，其对应球面上点也越来越接近 N.



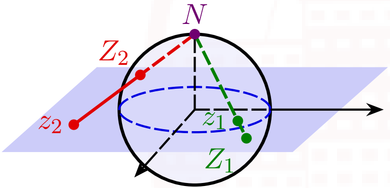
当 $|z|$ 越来越大时，其对应球面上点也越来越接近 N.

若我们在复平面上添加一个额外的" 点"——无穷远点，记作 ∞.



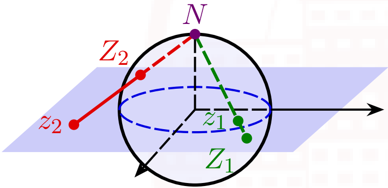
当 $|z|$ 越来越大时，其对应球面上点也越来越接近 N.

若我们在复平面上添加一个额外的" 点"——无穷远点，记作 ∞. 那么扩充复数集合 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应.



当 $|z|$ 越来越大时，其对应球面上点也越来越接近 N.

若我们在复平面上添加一个额外的" 点"——**无穷远点**，记作 ∞. 那么**扩充复数集合** $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应. 称这样的球面为**复球面**，称包含无穷远点的复平面为**扩充复平面**或**闭复平面**.



复球面：无穷远点的邻域

若约定 $|\infty| = +\infty$, 则分别称

$$U(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| > X\}, \quad \mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为 ∞ 的 X **邻域**和**去心 X 邻域**.

若约定 $|\infty| = +\infty$, 则分别称

$$U(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| > X\}, \quad \mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为 ∞ 的 X **邻域**和**去心 X 邻域**. 这样, 前述极限可统一表述为: 若对 $z \in \mathbb{C}^*$ 的任意 δ 邻域 U, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $z_n \in U$, 则记 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

若约定 $|\infty| = +\infty$, 则分别称

$$U(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| > X\}, \quad \mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为 ∞ 的 X **邻域**和**去心 X 邻域**. 这样, 前述极限可统一表述为: 若对 $z \in \mathbb{C}^*$ 的任意 δ 邻域 U, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $z_n \in U$, 则记 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

朴素地看, 复球面上任意一点可以定义 δ 邻域为与其距离小于 δ 的所有点.

若约定 $|\infty| = +\infty$，则分别称

$$U(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| > X\}, \quad \mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为 ∞ 的 X **邻域**和**去心 X 邻域**. 这样，前述极限可统一表述为：若对 $z \in \mathbb{C}^*$ 的任意 δ 邻域 U，存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时，$z_n \in U$，则记 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

朴素地看，复球面上任意一点可以定义 δ 邻域为与其距离小于 δ 的所有点. 特别地，∞ 的邻域通过前面所说的对应关系，可以对应到扩充复平面上 ∞ 的一个邻域.

若约定 $|\infty| = +\infty$，则分别称

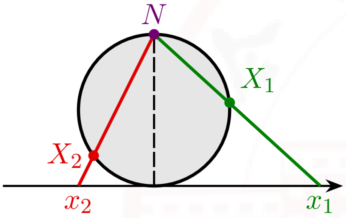
$$U(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| > X\}, \quad \mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为 ∞ 的 X **邻域**和**去心 X 邻域**. 这样, 前述极限可统一表述为：若对 $z \in \mathbb{C}^*$ 的任意 δ 邻域 U, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $z_n \in U$, 则记 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

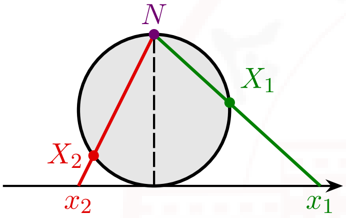
朴素地看, 复球面上任意一点可以定义 δ 邻域为与其距离小于 δ 的所有点. 特别地, ∞ 的邻域通过前面所说的对应关系, 可以对应到扩充复平面上 ∞ 的一个邻域. 所以在复球面上, 普通复数和 ∞ 的邻域具有同等地位.

它和实数列极限符号中的 ∞ 有什么联系呢?

它和实数列极限符号中的 ∞ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应.



它和实数列极限符号中的 ∞ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应．于是实数列极限符号中的 ∞ 在复球面上就是 ∞．



函数的极限

定义. 设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

定义. 设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义. 若存在复数 A, 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon), \exists\delta>0$ 使得

$$z \in \mathring{U}(z_0,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon),$$

定义. 设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义. 若存在复数 A, 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon), \exists\delta>0$ 使得

$$z \in \mathring{U}(z_0,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \to A(z \to z_0)$.

定义. 设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义. 若存在复数 A, 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon), \exists\delta > 0$ 使得

$$z \in \mathring{U}(z_0,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \to A(z \to z_0)$.

在此表述下, 将上述定义中的 z_0 或 A 换成 ∞, 即可得到 $z \to \infty$ 时的极限定义, 以及 $\lim f(z) = \infty$ 的含义.

类似于复数列情形, 极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

类似于复数列情形, 极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理. 设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 则

类似于复数列情形, 极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理. 设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B$;

类似于复数列情形, 极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理. 设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0} (fg)(z) = AB$;

类似于复数列情形, 极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理. 设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}(f\pm g)(z)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}(fg)(z)=AB$;

(3) 当 $B\neq 0$ 时, $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(z)=\dfrac{A}{B}$.

和数列极限类似，我们有下述定理:

和数列极限类似，我们有下述定理:

定理. 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y), z_0=x_0+y_0\mathrm{i}, A=u_0+v_0\mathrm{i}$，则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \iff \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

和数列极限类似，我们有下述定理：

定理. 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y), z_0=x_0+y_0\mathrm{i}, A=u_0+v_0\mathrm{i}$，则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \iff \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

该定理表明：研究复变函数极限，只需研究其实部、虚部两个二元实函数的极限.

与实函数极限之联系

和数列极限类似，我们有下述定理:

定理. 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y), z_0=x_0+y_0\mathrm{i}, A=u_0+v_0\mathrm{i}$，则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \iff \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

该定理表明：研究复变函数极限，只需研究其实部、虚部两个二元实函数的极限.

在学习了复变函数的导数后，我们也可以使用等价无穷小替换、洛必达法则等工具来计算极限.

例题：判断函数极限是否存在

例. 证明：当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

例题：判断函数极限是否存在

例. 证明：当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明. 令 $z = x + yi$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

例题：判断函数极限是否存在

例. 证明：当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明. 令 $z = x + yi$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因此

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad v(x,y) = 0.$$

例题：判断函数极限是否存在

例. 证明：当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明. 令 $z = x + y\mathrm{i}$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时，$u(x, y) \to \pm 1$.

例题：判断函数极限是否存在

例. 证明：当 $z\to 0$ 时，函数 $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明. 令 $z=x+yi$，则 $f(z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因此

$$u(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad v(x,y)=0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时，$u(x,y)\to\pm1$. 因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ 不存在，从而 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在. □

定义.

函数的连续性

定义.

(1) 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

定义.

(1) 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 **处连续**.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D **内连续**.

定义.

(1) 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 **处连续**.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D **内连续**.

根据前面的极限判定定理可知:

函数的连续性

定义.

(1) 若 $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 **处连续**.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D **内连续**.

根据前面的极限判定定理可知:

定理.

定义.

(1) 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 **处连续**.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续，则称 $f(z)$ 在 D **内连续**.

根据前面的极限判定定理可知:

定理.

(1) 函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

定义.

(1) 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 **处连续**.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D **内连续**.

根据前面的极限判定定理可知:

定理.

(1) 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

(2) 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0)\neq 0$) 在 z_0 处仍然连续.

定义.

(1) 若 $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 **处连续**.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D **内连续**.

根据前面的极限判定定理可知:

定理.

(1) 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

(2) 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0)\neq 0$) 在 z_0 处仍然连续.

(3) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

例题：连续函数的性质

例.

例.

(1) 设

$$f(z)=\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}(x^2-y^2).$$

例题：连续函数的性质

例.

(1) 设

$$f(z)=\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}(x^2-y^2).$$

$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 除原点外处处连续，$v(x,y)=x^2-y^2$ 处处连续.

例.

(1) 设

$$f(z)=\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}(x^2-y^2).$$

$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 除原点外处处连续，$v(x,y)=x^2-y^2$ 处处连续. 因此 $f(z)$ 在 $z\neq 0$ 处连续.

例.

(1) 设

$$f(z) = \ln(x^2 + y^2) + \mathrm{i}(x^2 - y^2).$$

$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ 除原点外处处连续，$v(x, y) = x^2 - y^2$ 处处连续. 因此 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处连续.

(2) 显然 $f(z) = z$ 是处处连续的，

例.

(1) 设
$$f(z)=\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}(x^2-y^2).$$
$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 除原点外处处连续，$v(x,y)=x^2-y^2$ 处处连续．因此 $f(z)$ 在 $z\neq 0$ 处连续．

(2) 显然 $f(z)=z$ 是处处连续的，故多项式函数
$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$
也处处连续，

例.

(1) 设

$$f(z)=\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}(x^2-y^2).$$

$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 除原点外处处连续，$v(x,y)=x^2-y^2$ 处处连续．因此 $f(z)$ 在 $z\neq 0$ 处连续．

(2) 显然 $f(z)=z$ 是处处连续的，故多项式函数

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

也处处连续，有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续．

例题：函数连续性的判定

例. 证明：若 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

例. 证明：若 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明. 设

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y), \quad z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0.$$

例题：函数连续性的判定

例. 证明：若 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明. 设

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y), \quad z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0.$$

那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

例题：函数连续性的判定

例. 证明：若 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明. 设

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y), \quad z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0.$$

那么 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 从而 $-v(x, y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续.

例题：函数连续性的判定

例. 证明：若 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明. 设

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y), \quad z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0.$$

那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续. 所以

$$\overline{f(z)} = u(x,y) - \mathrm{i}v(x,y)$$

在 (x_0, y_0) 连续. $\square$

例题：函数连续性的判定

例. 证明：若 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明. 设

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y), \quad z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0.$$

那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0,y_0) 连续. 所以

$$\overline{f(z)} = u(x,y) - \mathrm{i}v(x,y)$$

在 (x_0,y_0) 连续. □

另证. 函数 $g(z) = \overline{z} = x - \mathrm{i}y$ 处处连续,

例题：函数连续性的判定

例. 证明：若 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明. 设

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y), \quad z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0.$$

那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0,y_0) 连续. 所以

$$\overline{f(z)} = u(x,y) - \mathrm{i}v(x,y)$$

在 (x_0,y_0) 连续. □

另证. 函数 $g(z) = \overline{z} = x - \mathrm{i}y$ 处处连续，从而 $g(f(z)) = \overline{f(z)}$ 在 z_0 处连续. □

注记

可以看出，在极限和连续性上，复变函数和两个二元实函数没有什么差别.

注记

可以看出，在极限和连续性上，复变函数和两个二元实函数没有什么差别。那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢?

注记

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢?

归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法.

注记

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢?

归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法. 这就导致了复变函数有导数, 而不是像多变量实函数只有偏导数.

注记

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢?

归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法. 这就导致了复变函数有**导数**, 而不是像多变量实函数只有偏导数. 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将在下一章来逐步揭开它的神秘面纱.