合肥工業大學
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第二章　解析函数

第一节　解析函数的概念

- 可导函数
- 可微函数
- 解析函数

由于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

由于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义. **设** $w = f(z)$ **的定义域是区域** D**,** $z_0 \in D$**.**

由于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义. 设 $w=f(z)$ 的定义域是区域 D, $z_0\in D$. 若极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ **在** z_0 **可导**.

由于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义. 设 $w = f(z)$ 的定义域是区域 D, $z_0 \in D$. 若极限

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作 $f'(z_0)$.

由于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义. 设 $w = f(z)$ 的定义域是区域 D, $z_0 \in D$. 若极限

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ **在 z_0 可导**. 这个极限值称为 $f(z)$ **在 z_0 的导数**, 记作 $f'(z_0)$. 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 称 $f(z)$ **在 D 内可导**.

例题：线性函数的不可导性

例. 函数 $f(z) = x + 2yi$ 在哪些点处可导？

例. 函数 $f(z) = x + 2yi$ 在哪些点处可导？

解答. 由定义可知

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

例. 函数 $f(z)=x+2y\mathrm{i}$ 在哪些点处可导？

解答. 由定义可知

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)\mathrm{i}-(x+2y\mathrm{i})}{\Delta z}
\end{aligned}
$$

例. 函数 $f(z)=x+2y\mathrm{i}$ 在哪些点处可导？

解答. 由定义可知

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)\mathrm{i}-(x+2y\mathrm{i})}{\Delta z}\\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\,\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.
\end{aligned}$$

例. 函数 $f(z)=x+2y\mathrm{i}$ 在哪些点处可导？

解答. 由定义可知

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)\mathrm{i}-(x+2y\mathrm{i})}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\,\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}. \end{aligned}$$

当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时，上式 $\to 2$;

例. 函数 $f(z) = x + 2y\mathrm{i}$ 在哪些点处可导？

解答. 由定义可知

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x+\Delta x) + 2(y+\Delta y)\mathrm{i} - (x+2y\mathrm{i})}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\,\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x + \Delta y\mathrm{i}}.
\end{aligned}
$$

当 $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ 时，上式 $\to 2$；当 $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ 时，上式 $\to 1$.

例题：线性函数的不可导性

例. 函数 $f(z)=x+2y\mathrm{i}$ 在哪些点处可导？

解答. 由定义可知

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)\mathrm{i}-(x+2y\mathrm{i})}{\Delta z}\\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\,\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.
\end{aligned}
$$

当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时，上式 $\to 2$；当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时，上式 $\to 1$. 因此该极限不存在，$f(z)$ 处处不可导.

例题：复变函数的导数

练习. 函数 $f(z)=\overline{z}=x-yi$ 在哪些点处可导？

例题：复变函数的导数

练习. 函数 $f(z)=\overline{z}=x-yi$ 在哪些点处可导?

答案. 处处不可导.

练习. 函数 $f(z)=\overline{z}=x-yi$ 在哪些点处可导？

答案. 处处不可导.

例. 求 $f(z)=z^2$ 的导数.

例题：复变函数的导数

练习. 函数 $f(z)=\overline{z}=x-yi$ 在哪些点处可导？

答案. 处处不可导.

例. 求 $f(z)=z^2$ 的导数.

解答.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

练习. 函数 $f(z)=\overline{z}=x-yi$ 在哪些点处可导？

答案. 处处不可导.

例. 求 $f(z)=z^2$ 的导数.

解答.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}$$

例题：复变函数的导数

练习. 函数 $f(z)=\overline{z}=x-yi$ 在哪些点处可导？

答案. 处处不可导.

例. 求 $f(z)=z^2$ 的导数.

解答.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z.$$

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

(1) $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;

求导运算法则

事实上，和单变量实函数情形类似，复变函数也有如下求导法则.

定理.

(1) $(c)' = 0$，其中 c 为复常数;

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$，其中 n 为整数;

事实上，和单变量实函数情形类似，复变函数也有如下求导法则.

定理.

(1) $(c)' = 0$，其中 c 为复常数；

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$，其中 n 为整数；

(3) $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf'$； 线性性质

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

(1) $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;

(3) $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf'$; 线性性质

(4) $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$; 莱布尼兹法则

事实上，和单变量实函数情形类似，复变函数也有如下求导法则.

定理.

(1) $(c)' = 0$，其中 c 为复常数；

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$，其中 n 为整数；

(3) $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf'$； 线性性质

(4) $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$； 莱布尼兹法则

(5) $\big(f(g(z))\big)' = f'(g(z)) \cdot g'(z)$； 复合函数求导

事实上, 和单变量实函数情形类似, 复变函数也有如下求导法则.

定理.

(1) $(c)'=0$, 其中 c 为复常数;

(2) $(z^n)'=nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;

(3) $(f\pm g)'=f'\pm g',\quad (cf)'=cf'$; 线性性质

(4) $(fg)'=f'g+fg',\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$; 莱布尼兹法则

(5) $\big(f(g(z))\big)'=f'(g(z))\cdot g'(z)$; 复合函数求导

(6) $g'(z)=\dfrac{1}{f'(w)}, g=f^{-1}, w=g(z)$. 反函数求导

由上述求导法则，不难知道:

由上述求导法则，不难知道:

定理.

由上述求导法则, 不难知道:

定理.

(1) 在 z_0 处可导的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处可导.

由上述求导法则, 不难知道:

定理.

(1) 在 z_0 处可导的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0)\neq 0)$ 仍然在 z_0 处可导.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处可导, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处可导, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处可导.

由上述求导法则，不难知道：

定理.

(1) 在 z_0 处可导的两个函数 $f(z)$，$g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处可导.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处可导，函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处可导，则 $f(g(z))$ 在 z_0 处可导.

由此可知，多项式函数处处可导，有理函数在其定义域内处处可导，且二者导数形式和单变量实函数情形类似.

例. 求 $f(z)=\dfrac{z^2+3}{z+1}$ 的导数.

例题：利用求导运算法则计算导数

例. 求 $f(z)=\dfrac{z^2+3}{z+1}$ 的导数.

解答. 由于

$$f(z)=z-1+\frac{4}{z+1},$$

例题：利用求导运算法则计算导数

例. 求 $f(z)=\dfrac{z^2+3}{z+1}$ 的导数.

解答. 由于

$$f(z)=z-1+\frac{4}{z+1},$$

因此

$$f'(z)=1-\frac{4}{(z+1)^2}.$$

可导蕴含连续

定理. 若 $f(z)$ 在 z_0 可导，则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

可导蕴含连续

定理. 若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

该定理的证明和单变量实函数情形完全相同.

定理. 若 $f(z)$ 在 z_0 可导，则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

该定理的证明和单变量实函数情形完全相同.

证明. 设 $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$,

定理. 若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

该定理的证明和单变量实函数情形完全相同.

证明. 设 $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$, 则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z$$

定理. 若 $f(z)$ 在 z_0 可导，则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

该定理的证明和单变量实函数情形完全相同.

证明. 设 $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$，则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z$$

可导蕴含连续

定理. 若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

该定理的证明和单变量实函数情形完全相同.

证明. 设 $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$, 则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z = f'(z_0) \cdot 0 = 0,$$

定理. 若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

该定理的证明和单变量实函数情形完全相同.

证明. 设 $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$, 则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z = f'(z_0) \cdot 0 = 0,$$

从而 $f(z)$ 在 z_0 处连续. □

复变函数的微分

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

复变函数的微分

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\,\Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量,

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 $w=f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = A\,\Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微,

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\,\Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 **处可微**, 称 $A\,\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 **的微分**, 记作 $\mathrm{d}w = A\,\Delta z$.

复变函数的微分

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 $w=f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = A\,\Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\,\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $\mathrm{d}w = A\,\Delta z$.

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $\mathrm{d}w = f'(z_0)\,\Delta z$, $\mathrm{d}z = \Delta z$.

复变函数的微分

复变函数的微分也和单变量实函数情形类似.

定义. 若存在常数 A 使得函数 $w=f(z)$ 满足

$$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\,\Delta z+o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 **处可微**, 称 $A\,\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 **的微分**, 记作 $\mathrm{d}w=A\,\Delta z$.

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $\mathrm{d}w=f'(z_0)\,\Delta z$, $\mathrm{d}z=\Delta z$. 故

$$\mathrm{d}w=f'(z_0)\,\mathrm{d}z,\quad f'(z_0)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}.$$

解析、解析函数和奇点

定义.

定义.

(1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

定义.

(1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.

定义.

(1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.

(3) 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

定义.

(1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.

(3) 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导，反之未必.

定义.

(1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.

(3) 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导，反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析，都会导致奇点的产生.

定义.

(1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.

(3) 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导，反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析，都会导致奇点的产生. 不过，若 z_0 是 $f(z)$ 定义域的外点，即存在 z_0 的邻域与 $f(z)$ 定义域交集为空集，这种情形不甚有趣，因此我们不考虑这类奇点.

定义.

(1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.

(3) 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导，反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析，都会导致奇点的产生. 不过，若 z_0 是 $f(z)$ 定义域的外点，即存在 z_0 的邻域与 $f(z)$ 定义域交集为空集，这种情形不甚有趣，因此我们不考虑这类奇点.

在区域 D 内解析和在 D 内可导是等价的.

定义.

(1) 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.

(3) 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

在一点解析蕴含在这点可导，反之未必. 无定义、不连续、不可导、可导但不解析，都会导致奇点的产生. 不过，若 z_0 是 $f(z)$ 定义域的外点，即存在 z_0 的邻域与 $f(z)$ 定义域交集为空集，这种情形不甚有趣，因此我们不考虑这类奇点.

在区域 D 内解析和在 D 内可导是等价的. 这是因为任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 内的邻域.

例题：解析与可导的关系

由于一个点的邻域也是一个开集，因此若 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，从而在该邻域内解析.

例题：解析与可导的关系

由于一个点的邻域也是一个开集，因此若 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，从而在该邻域内解析．因此 $f(z)$ 解析点全体是一个开集，它是可导点集合的内点构成的集合．

例题：解析与可导的关系

由于一个点的邻域也是一个开集，因此若 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，从而在该邻域内解析．因此 $f(z)$ 解析点全体是一个开集，它是可导点集合的内点构成的集合．

练习． 函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析是 $f(z)$ 在该点可导的(　　)．

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

例题：解析与可导的关系

由于一个点的邻域也是一个开集，因此若 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，从而在该邻域内解析．因此 $f(z)$ 解析点全体是一个开集，它是可导点集合的内点构成的集合．

练习. 函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析是 $f(z)$ 在该点可导的(A).

(A) 充分条件 (B) 必要条件

(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

由于一个点的邻域也是一个开集，因此若 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，从而在该邻域内解析。因此 $f(z)$ 解析点全体是一个开集，它是可导点集合的内点构成的集合.

练习. 函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析是 $f(z)$ 在该点可导的(A).

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

答案. 解析要求在 z_0 的一个邻域内都可导才行.

例题：函数的解析性

例. 研究函数 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

例. 研究函数 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

解答. 注意到

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.$$

例. 研究函数 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

解答. 注意到

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.$$

- 若 $z=0$, 则当 $\Delta z\to 0$ 时该极限为 0.

例题：函数的解析性

例. 研究函数 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

解答. 注意到

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.$$

- 若 $z=0$, 则当 $\Delta z\to 0$ 时该极限为 0.
- 若 $z\neq 0$, 则当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}+z$;

例题：函数的解析性

例. 研究函数 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

解答. 注意到

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.$$

- 若 $z=0$, 则当 $\Delta z\to 0$ 时该极限为 0.
- 若 $z\neq 0$, 则当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}+z$;

当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}-z$.

例. 研究函数 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

解答. 注意到

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.$$

- 若 $z=0$, 则当 $\Delta z\to 0$ 时该极限为 0.
- 若 $z\neq 0$, 则当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}+z$;

当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}-z$. 因此此时极限不存在.

例题：函数的解析性

例. 研究函数 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

解答. 注意到

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}.$$

- 若 $z=0$, 则当 $\Delta z\to 0$ 时该极限为 0.
- 若 $z\neq 0$, 则当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}+z$;

当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}-z$. 因此此时极限不存在. 故 $f(z)$ 仅在 $z=0$ 处可导, 从而处处不解析.

定理.

定理.

(1) 在 z_0 处解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0)\neq 0$) 仍然在 z_0 处解析.

定理.

(1) 在 z_0 处解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 仍然在 z_0 处解析.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处解析，函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处解析，则 $f(g(z))$ 在 z_0 处解析.

定理.

(1) 在 z_0 处解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 仍然在 z_0 处解析.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处解析, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处解析.

定理.

定理.

(1) 在 z_0 处解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处解析.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处解析, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处解析.

定理.

(1) 在 D 内解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商仍然在 D (作商时需要去掉 $g(z) = 0$ 的点) 内解析.

定理.

(1) 在 z_0 处解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处解析.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处解析, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处解析.

定理.

(1) 在 D 内解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商仍然在 D (作商时需要去掉 $g(z) = 0$ 的点) 内解析.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 D 内解析且像均落在 D' 中, 函数 $f(w)$ 在 D' 内解析, 则 $f(g(z))$ 在 D 内解析.

定理.

(1) 在 z_0 处解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 仍然在 z_0 处解析.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 z_0 处解析, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处解析, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处解析.

定理.

(1) 在 D 内解析的两个函数 $f(z)$, $g(z)$ 之和、差、积、商仍然在 D (作商时需要去掉 $g(z)=0$ 的点) 内解析.

(2) 若函数 $g(z)$ 在 D 内解析且像均落在 D' 中, 函数 $f(w)$ 在 D' 内解析, 则 $f(g(z))$ 在 D 内解析.

由此可知, 多项式函数处处解析. 有理函数在其定义域内处处解析, 分母的零点是它的奇点.

第二节　函数解析的充要条件

- 柯西-黎曼方程
- 柯西-黎曼方程的应用

可导函数的特点

通过对一些简单函数的分析, 我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \bar{z}$ 等内容.

通过对一些简单函数的分析，我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式，而不解析的往往包含 $x, y, \overline{z}$ 等内容.

这种现象并不是偶然的.

通过对一些简单函数的分析, 我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \bar{z}$ 等内容.

这种现象并不是偶然的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

可导函数的特点

通过对一些简单函数的分析, 我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \bar{z}$ 等内容.

这种现象并不是偶然的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.

设 $f = u + iv$ 在 z 处可导，$f'(z) = a + bi$，

可导的等价刻画：形式推导

设 $f=u+\mathrm{i}v$ 在 z 处可导，$f'(z)=a+b\mathrm{i}$，则

$$\Delta u+\mathrm{i}\,\Delta v=\Delta f=(a+b\mathrm{i})(\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y)+o(\Delta z).$$

可导的等价刻画：形式推导

设 $f = u + \mathrm{i}v$ 在 z 处可导, $f'(z) = a + b\mathrm{i}$, 则

$$\Delta u + \mathrm{i}\,\Delta v = \Delta f = (a + b\mathrm{i})(\Delta x + \mathrm{i}\,\Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\begin{aligned}\Delta u &= a\,\Delta x - b\,\Delta y + o(\Delta z),\\ \Delta v &= b\,\Delta x + a\,\Delta y + o(\Delta z).\end{aligned}$$

可导的等价刻画：形式推导

设 $f=u+\mathrm{i}v$ 在 z 处可导，$f'(z)=a+b\mathrm{i}$，则

$$\Delta u+\mathrm{i}\,\Delta v=\Delta f=(a+b\mathrm{i})(\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y)+o(\Delta z).$$

展开可知

$$\begin{aligned}\Delta u&=a\,\Delta x-b\,\Delta y+o(\Delta z),\\ \Delta v&=b\,\Delta x+a\,\Delta y+o(\Delta z).\end{aligned}$$

由于 $o(\Delta z)=o(|\Delta z|)=o(\sqrt{x^2+y^2})$，

设 $f=u+\mathrm{i}v$ 在 z 处可导，$f'(z)=a+b\mathrm{i}$，则

$$\Delta u+\mathrm{i}\,\Delta v=\Delta f=(a+b\mathrm{i})(\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y)+o(\Delta z).$$

展开可知

$$\begin{aligned}\Delta u&=a\,\Delta x-b\,\Delta y+o(\Delta z),\\ \Delta v&=b\,\Delta x+a\,\Delta y+o(\Delta z).\end{aligned}$$

由于 $o(\Delta z)=o(|\Delta z|)=o(\sqrt{x^2+y^2})$，因此 u,v 可微且 $u_x=v_y=a, v_x=-u_y=b$.

反过来，假设 u, v **可微且** $u_x = v_y, v_x = -u_y$.

可导的等价刻画：形式推导

反过来，假设 u, v **可微且** $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\Delta u = u_x \, \Delta x + u_y \, \Delta y + o(\Delta z) = u_x \, \Delta x - v_x \, \Delta y + o(\Delta z),$$

可导的等价刻画：形式推导

反过来，假设 u, v **可微且** $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\Delta u = u_x\,\Delta x + u_y\,\Delta y + o(\Delta z) = u_x\,\Delta x - v_x\,\Delta y + o(\Delta z),$$
$$\Delta v = v_x\,\Delta x + v_y\,\Delta y + o(\Delta z) = v_x\,\Delta x + u_x\,\Delta y + o(\Delta z),$$

可导的等价刻画：形式推导

反过来，假设 u,v **可微且** $u_x=v_y, v_x=-u_y$. 由全微分公式

$$\Delta u = u_x\,\Delta x + u_y\,\Delta y + o(\Delta z) = u_x\,\Delta x - v_x\,\Delta y + o(\Delta z),$$
$$\Delta v = v_x\,\Delta x + v_y\,\Delta y + o(\Delta z) = v_x\,\Delta x + u_x\,\Delta y + o(\Delta z),$$
$$\Delta f = \Delta(u+\mathrm{i}v) = (u_x + \mathrm{i}v_x)\,\Delta x + (-v_x + \mathrm{i}u_x)\,\Delta y + o(\Delta z)$$

反过来，假设 u, v **可微且** $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\begin{aligned}
\Delta u &= u_x\,\Delta x + u_y\,\Delta y + o(\Delta z) = u_x\,\Delta x - v_x\,\Delta y + o(\Delta z),\\
\Delta v &= v_x\,\Delta x + v_y\,\Delta y + o(\Delta z) = v_x\,\Delta x + u_x\,\Delta y + o(\Delta z),\\
\Delta f &= \Delta(u + \mathrm{i}v) = (u_x + \mathrm{i}v_x)\,\Delta x + (-v_x + \mathrm{i}u_x)\,\Delta y + o(\Delta z)\\
&= (u_x + \mathrm{i}v_x)\,\Delta(x + \mathrm{i}y) + o(\Delta z)
\end{aligned}$$

反过来，假设 u, v **可微且** $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= u_x\,\Delta x + u_y\,\Delta y + o(\Delta z) = u_x\,\Delta x - v_x\,\Delta y + o(\Delta z),\\
\Delta v &= v_x\,\Delta x + v_y\,\Delta y + o(\Delta z) = v_x\,\Delta x + u_x\,\Delta y + o(\Delta z),\\
\Delta f &= \Delta(u + \mathrm{i}v) = (u_x + \mathrm{i}v_x)\,\Delta x + (-v_x + \mathrm{i}u_x)\,\Delta y + o(\Delta z)\\
&= (u_x + \mathrm{i}v_x)\,\Delta(x + \mathrm{i}y) + o(\Delta z)\\
&= (u_x + \mathrm{i}v_x)\,\Delta z + o(\Delta z).
\end{aligned}
$$

可导的等价刻画：形式推导

反过来，假设 u, v **可微且** $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= u_x\,\Delta x + u_y\,\Delta y + o(\Delta z) = u_x\,\Delta x - v_x\,\Delta y + o(\Delta z),\\
\Delta v &= v_x\,\Delta x + v_y\,\Delta y + o(\Delta z) = v_x\,\Delta x + u_x\,\Delta y + o(\Delta z),\\
\Delta f &= \Delta(u + \mathrm{i}v) = (u_x + \mathrm{i}v_x)\,\Delta x + (-v_x + \mathrm{i}u_x)\,\Delta y + o(\Delta z)\\
&= (u_x + \mathrm{i}v_x)\,\Delta(x + \mathrm{i}y) + o(\Delta z)\\
&= (u_x + \mathrm{i}v_x)\,\Delta z + o(\Delta z).
\end{aligned}
$$

故 $f(z)$ **在** z **处可导，且** $f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y$.

由此得到

由此得到

柯西-黎曼定理. $f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u, v 可微且满足柯西-黎曼方程 (简称为 C-R 方程):

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y.$$


由此得到

柯西-黎曼定理. $f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u, v 可微且满足柯西-黎曼方程 (简称为 C-R 方程):

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y.$$

需要注意的是：柯西-黎曼定理中的可微性和 C-R 方程缺一不可.

注意到 $x = \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{2}\overline{z}, y = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}z + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\overline{z}.$

注意到 $x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}, y=-\frac{\mathrm{i}}{2}z+\frac{\mathrm{i}}{2}\overline{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则，定义 f 对 z 和 $\overline{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}.\end{cases}$$

注意到 $x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}, y=-\frac{\mathrm{i}}{2}z+\frac{\mathrm{i}}{2}\overline{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 定义 f 对 z 和 $\overline{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y},\\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}.\end{cases}.$$

若把 $z,\overline{z}$ 看成独立变量, 那么

柯西-黎曼方程的等价形式

注意到 $x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}, y=-\frac{\mathrm{i}}{2}z+\frac{\mathrm{i}}{2}\overline{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 定义 f 对 z 和 $\overline{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}.$$

若把 $z,\overline{z}$ 看成独立变量, 那么

- 当 f 在 z 处可导时, $\mathrm{d}f=f'\,\mathrm{d}z$.

柯西-黎曼方程的等价形式

注意到 $x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}, y=-\frac{\mathrm{i}}{2}z+\frac{\mathrm{i}}{2}\overline{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 定义 f 对 z 和 $\overline{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}.\end{cases}.$$

若把 $z,\overline{z}$ 看成独立变量, 那么

- 当 f 在 z 处可导时, $\mathrm{d}f=f'\,\mathrm{d}z$.
- 当 f 关于 $z,\overline{z}$ 可微时 (即 u,v 可微), $\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z}$.

柯西-黎曼方程的等价形式

注意到 $x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}, y=-\frac{\mathrm{i}}{2}z+\frac{\mathrm{i}}{2}\overline{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 定义 f 对 z 和 $\overline{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y},\\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}.\end{cases}.$$

若把 $z,\overline{z}$ 看成独立变量, 那么

- 当 f 在 z 处可导时, $\mathrm{d}f=f'\,\mathrm{d}z$.
- 当 f 关于 $z,\overline{z}$ 可微时 (即 u,v 可微), $\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z}$.

所以 f 在 z 处可导当且仅当 u,v 可微且 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$, 此时 $f'(z)=\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

柯西-黎曼方程的等价形式

注意到 $x=\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2}\overline{z}, y=-\dfrac{\mathrm{i}}{2}z+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\overline{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 定义 f 对 z 和 $\overline{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}.\end{cases}.$$

若把 $z,\overline{z}$ 看成独立变量, 那么

- 当 f 在 z 处可导时, $\mathrm{d}f=f'\,\mathrm{d}z$.
- 当 f 关于 $z,\overline{z}$ 可微时 (即 u,v 可微), $\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z}$.

所以 **f 在 z 处可导当且仅当 u,v 可微且 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$, 此时 $f'(z)=\dfrac{\partial f}{\partial z}$.** 这也解释了为何含有 $x,y,\overline{z}$ 形式的函数往往不可导, 而可导的函数往往可以直接表达为 z 的形式.

可导的充分性条件

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

可导的充分性条件

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理.

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理.

(1) 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续, 且满足 C-R 方程, 则 $f(z)$ 在 z 可导.

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理.

(1) 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续, 且满足 C-R 方程, 则 $f(z)$ 在 z 可导.

(2) 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在区域 D 上处处连续, 且满足 C-R 方程, 则 $f(z)$ 在 D 上可导(从而解析).

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微，因此我们有：

定理.

(1) 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续，且满足 C-R 方程，则 $f(z)$ 在 z 可导.

(2) 若 u_x, u_y, v_x, v_y 在区域 D 上处处连续，且满足 C-R 方程，则 $f(z)$ 在 D 上可导 (从而解析).

这些连续性要求也可以换成 $\dfrac{\partial f}{\partial z}, \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ 的连续性.

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = \overline{z}$ 在何处可导，在何处解析？

例. 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在何处可导，在何处解析？

解答. 由 $u = x, v = -y$ 可知

$$u_x = 1, \qquad u_y = 0,$$
$$v_x = 0, \qquad v_y = -1.$$

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在何处可导，在何处解析？

解答. 由 $u = x, v = -y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 1, & u_y &= 0, \\ v_x &= 0, & v_y &= -1. \end{aligned}$$

因为 $u_x = 1 \neq v_y = -1$，所以该函数处处不可导，处处不解析.

例. 函数 $f(z)=\overline{z}$ 在何处可导，在何处解析？

解答. 由 $u=x, v=-y$ 可知

$$
\begin{aligned}
u_x &= 1, & u_y &= 0, \\
v_x &= 0, & v_y &= -1.
\end{aligned}
$$

因为 $u_x=1\neq v_y=-1$，所以该函数处处不可导，处处不解析.

也可由 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=1\neq 0$ 看出.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在何处可导，在何处解析？

解答. 由 $f(z) = x^2 + \mathrm{i}xy, u = x^2, v = xy$ 可知

例. 函数 $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$ 在何处可导，在何处解析？

解答. 由 $f(z) = x^2 + \mathrm{i}xy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$u_x = 2x, \qquad u_y = 0,$$
$$v_x = y, \qquad v_y = x.$$

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = z\operatorname{Re} z$ 在何处可导，在何处解析？

解答. 由 $f(z) = x^2 + \mathrm{i}xy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\ v_x &= y, & v_y &= x. \end{aligned}$$

由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 *C-R* 方程.

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = z\operatorname{Re} z$ 在何处可导，在何处解析？

解答. 由 $f(z) = x^2 + \mathrm{i}xy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\ v_x &= y, & v_y &= x. \end{aligned}$$

由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 *C-R* 方程. 因此该函数只在 0 可导，处处不解析且 $f'(0) = u_x(0) + \mathrm{i}v_x(0) = 0$.

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z)=z\operatorname{Re}z$ 在何处可导，在何处解析？

解答. 由 $f(z)=x^2+\mathrm{i}xy, u=x^2, v=xy$ 可知

$$
\begin{aligned}
u_x &= 2x, & u_y &= 0,\\
v_x &= y, & v_y &= x.
\end{aligned}
$$

由 $2x=x, 0=-y$ 可知只有 $x=y=0, z=0$ 满足 *C-R* 方程. 因此该函数只在 0 可导，处处不解析且 $f'(0)=u_x(0)+\mathrm{i}v_x(0)=0$.

也可由

$$
f=\frac{1}{2}z(z+\overline{z}),\quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}z
$$

看出，

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z) = z\operatorname{Re} z$ 在何处可导，在何处解析？

解答. 由 $f(z) = x^2 + \mathrm{i}xy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\ v_x &= y, & v_y &= x. \end{aligned}$$

由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导，处处不解析且 $f'(0) = u_x(0) + \mathrm{i}v_x(0) = 0$.

也可由

$$f = \frac{1}{2}z(z+\overline{z}), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}z$$

看出，$f'(0) = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=0} = z|_{z=0} = 0$.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z)=\mathrm{e}^{x}(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

例. 函数 $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 在何处可导，在何处解析？

解答. 由 $u=\mathrm{e}^x\cos y, v=\mathrm{e}^x\sin y$ 可知

例. 函数 $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 在何处可导，在何处解析？

解答. 由 $u=\mathrm{e}^x\cos y, v=\mathrm{e}^x\sin y$ 可知

$$
\begin{aligned}
u_x &= \mathrm{e}^x\cos y, & u_y &= -\mathrm{e}^x\sin y,\\
v_x &= \mathrm{e}^x\sin y, & v_y &= \mathrm{e}^x\cos y.
\end{aligned}
$$

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解答. 由 $u=\mathrm{e}^x\cos y, v=\mathrm{e}^x\sin y$ 可知

$$
\begin{aligned}
u_x &= \mathrm{e}^x\cos y, & u_y &= -\mathrm{e}^x\sin y,\\
v_x &= \mathrm{e}^x\sin y, & v_y &= \mathrm{e}^x\cos y.
\end{aligned}
$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)=f(z).$$

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 函数 $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解答. 由 $u=\mathrm{e}^x\cos y, v=\mathrm{e}^x\sin y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= \mathrm{e}^x\cos y, & u_y &= -\mathrm{e}^x\sin y, \\ v_x &= \mathrm{e}^x\sin y, & v_y &= \mathrm{e}^x\cos y. \end{aligned}$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)=f(z).$$

实际上, 这个函数就是复变量的指数函数 e^z.

练习. 函数(　　)在 $z=0$ 处不可导.

(A) $2x+3y\mathrm{i}$

(B) $2x^2+3y^2\mathrm{i}$

(C) $\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$

(D) $x^2-xy\mathrm{i}$

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

练习. 函数(A)在 $z=0$ 处不可导.

(A) $2x+3y\mathrm{i}$ (B) $2x^2+3y^2\mathrm{i}$

(C) $\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$ (D) $x^2-xy\mathrm{i}$

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

练习. 函数(A)在 $z=0$ 处不可导.

(A) $2x+3y\mathrm{i}$　　(B) $2x^2+3y^2\mathrm{i}$

(C) $\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$　　(D) $x^2-xy\mathrm{i}$

答案. 根据 *C-R* 方程可知对于 *A*, $u_x(0)=2\neq v_y(0)=3$.

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

练习. 函数(A)在 $z=0$ 处不可导.

(A) $2x+3y\mathrm{i}$　(B) $2x^2+3y^2\mathrm{i}$

(C) $\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$　(D) $x^2-xy\mathrm{i}$

答案. 根据 *C-R* 方程可知对于 *A*, $u_x(0)=2\neq v_y(0)=3$. 对于 *BD*, 各个偏导数在 0 处取值都是 0.

典型例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

练习. 函数(A)在 $z=0$ 处不可导.

(A) $2x+3y\mathrm{i}$

(B) $2x^2+3y^2\mathrm{i}$

(C) $\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$

(D) $x^2-xy\mathrm{i}$

答案. 根据 *C-R* 方程可知对于 *A*, $u_x(0)=2\neq v_y(0)=3$. 对于 *BD*, 各个偏导数在 0 处取值都是 0. *C* 则是处处都可导.

例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 设函数 $f(z)=(x^2+axy+by^2)+\mathrm{i}(cx^2+dxy+y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 $f'(z)$.

例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 设函数 $f(z)=(x^2+axy+by^2)+\mathrm{i}(cx^2+dxy+y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 $f'(z)$.

解答. 由于

$$u_x=2x+ay, \qquad u_y=ax+2by,$$
$$v_x=2cx+dy, \qquad v_y=dx+2y,$$

例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 设函数 $f(z)=(x^2+axy+by^2)+\mathrm{i}(cx^2+dxy+y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 $f'(z)$.

解答. 由于

$$\begin{aligned} u_x &= 2x+ay, & u_y &= ax+2by, \\ v_x &= 2cx+dy, & v_y &= dx+2y, \end{aligned}$$

因此

$$2x+ay=dx+2y,\quad ax+2by=-(2cx+dy),$$

例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 设函数 $f(z)=(x^2+axy+by^2)+\mathrm{i}(cx^2+dxy+y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 $f'(z)$.

解答. 由于

$$\begin{aligned} u_x &= 2x+ay, & u_y &= ax+2by,\\ v_x &= 2cx+dy, & v_y &= dx+2y, \end{aligned}$$

因此

$$2x+ay=dx+2y,\quad ax+2by=-(2cx+dy),$$

$$a=d=2,\quad b=c=-1,$$

例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例. 设函数 $f(z)=(x^2+axy+by^2)+\mathrm{i}(cx^2+dxy+y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 $f'(z)$.

解答. 由于

$$\begin{aligned} u_x &= 2x+ay, & u_y &= ax+2by,\\ v_x &= 2cx+dy, & v_y &= dx+2y, \end{aligned}$$

因此

$$2x+ay=dx+2y,\quad ax+2by=-(2cx+dy),$$

$$a=d=2,\quad b=c=-1,$$

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=2x+2y+\mathrm{i}(-2x+2y)=(2-2\mathrm{i})z.$$

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例. 若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

例题：利用 C-R 方程证明解析函数结论

例. 若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零，则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

例题：利用 C-R 方程证明解析函数结论

例. 若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零，则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数,

例题：利用 C-R 方程证明解析函数结论

例. 若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零，则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数，从而 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 是常数. □

例. 若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 是常数. □

类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 则下述条件均可推出 $f(z)$ 是常数:

例. 若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零，则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明. 由于

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = 0,$$

因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数，从而 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 是常数. □

类似地可以证明，若 $f(z)$ 在 D 内解析，则下述条件均可推出 $f(z)$ 是常数：

- $\arg f(z)$ 是一常数，
- $\operatorname{Re} f(z)$ 是一常数，
- $v = u^2$,
- $|f(z)|$ 是一常数，
- $\operatorname{Im} f(z)$ 是一常数，
- $u = v^2$.

例题：解析函数的保角性

例. 若 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零，则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

例题：解析函数的保角性

例. 若 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零，则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明. 由于 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y$，因此 u_x,u_y 不全为零.

例. 若 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明. 由于 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

例题：解析函数的保角性

例. 若 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零，则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明. 由于 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y$，因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

从而 $\boldsymbol{u}=(u_y,-u_x)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.

例题：解析函数的保角性

例. 若 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零，则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明. 由于 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y$，因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

从而 $\boldsymbol{u}=(u_y,-u_x)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理 $\boldsymbol{v}=(v_y,-v_x)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量.

例题：解析函数的保角性

例. 若 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零，则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明. 由于 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y$，因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

从而 $\boldsymbol{u}=(u_y,-u_x)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理 $\boldsymbol{v}=(v_y,-v_x)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量. 由于

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_yv_y+u_xv_x=u_yu_x-u_xu_y=0,$$

例题：解析函数的保角性

例. 若 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零，则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明. 由于 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y$，因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

从而 $\boldsymbol{u}=(u_y,-u_x)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理 $\boldsymbol{v}=(v_y,-v_x)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量. 由于

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_yv_y+u_xv_x=u_yu_x-u_xu_y=0,$$

因此这两个切向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 正交，从而曲线正交. □

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时，

例题：解析函数的保角性

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时，经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的.

例题：解析函数的保角性

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时，经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为**保角性**.

当 $f'(z_0)\neq 0$ 时，经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为**保角性**.

这是因为 $\mathrm{d}f=f'(z_0)\,\mathrm{d}z$.

例题：解析函数的保角性

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为**保角性**.

这是因为 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$.

当 $f'(z_0)\neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为**保角性**.

这是因为 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$. 由 w 复平面上曲线族 $u=c_1, v=c_2$ 正交可知上述例题成立.

第三节　初等函数

- 指数函数
- 对数函数
- 幂函数
- 三角函数和反三角函数
- 在有理函数的应用

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数.

指数函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复.

指数函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

(1) $\exp z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ (欧拉恒等式);

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

(1) $\exp z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ (欧拉恒等式);

(2) $\exp z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

(1) $\exp z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ (欧拉恒等式);

(2) $\exp z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);

(3) $\exp z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{z^k}{k!}$ (级数定义);

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

(1) $\exp z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ (欧拉恒等式);

(2) $\exp z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);

(3) $\exp z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{z^k}{k!}$ (级数定义);

(4) $\exp z$ 是唯一的一个处处解析的函数, 使得当 $z = x \in \mathbb{R}$ 时, $\exp z = \mathrm{e}^x$ (e^x 的解析延拓).

有些人会从 $\mathrm{e}^x, \cos x, \sin x$ 的泰勒展开

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots
\end{aligned}$$

形式地带入得到欧拉恒等式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$.

有些人会从 $e^x, \cos x, \sin x$ 的泰勒展开

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots
\end{aligned}$$

形式地带入得到欧拉恒等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明.

有些人会从 $\mathrm{e}^x, \cos x, \sin x$ 的泰勒展开

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

形式地带入得到欧拉恒等式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$. 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明. 我们将在第四章说明(1)、(3)和(4)是等价的.

指数函数的定义

我们来证明(1)和(2)等价.

指数函数的定义

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

指数函数的定义

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\quad(1^\infty\text{ 型不定式})$$

指数函数的定义

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n &= \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\Big)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty\ \text{型不定式})\\ &= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\Big(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\Big)\right) = \mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\quad(1^\infty\text{ 型不定式})$$
$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right)=\mathrm{e}^x.$$

不妨设 $n>|z|$, 这样 $1+\dfrac{z}{n}$ 落在右半平面,

指数函数的定义

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\quad(1^\infty\text{ 型不定式})$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right)=\mathrm{e}^x.$$

不妨设 $n>|z|$, 这样 $1+\dfrac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n\to\infty}n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\arctan\frac{y}{n+x}$$

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\Big)^{\frac{n}{2}}\quad(1^\infty \text{ 型不定式})$$
$$=\exp\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\Big(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\Big)\Big)=\mathrm{e}^x.$$

不妨设 $n>|z|$, 这样 $1+\dfrac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n\to\infty}n\arg\Big(1+\frac{z}{n}\Big)=\lim_{n\to\infty}n\arctan\frac{y}{n+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{ny}{n+x}=y.$$

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\quad(1^\infty\text{ 型不定式})$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right)=\mathrm{e}^x.$$

不妨设 $n>|z|$, 这样 $1+\dfrac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n\to\infty}n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\arctan\frac{y}{n+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{ny}{n+x}=y.$$

故 $\exp z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$.

指数函数的性质

定义. **指数函数**

$$\exp z := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

指数函数的性质

定义. 指数函数

$$\exp z := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

为了方便，我们也记 $\mathbf{e}^z = \exp z$.

指数函数的性质

定义. 指数函数

$$\exp z := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

为了方便, 我们也记 $\mathbf{e}^z = \exp z$. 指数函数有如下性质:

指数函数的性质

定义. 指数函数

$$\exp z := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

为了方便，我们也记 $\mathbf{e}^{z} = \exp z$. 指数函数有如下性质:

- $\exp z$ 处处解析，且 $(\exp z)' = \exp z$.

定义. 指数函数

$$\exp z := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

为了方便, 我们也记 $\mathbf{e}^z = \exp z$. 指数函数有如下性质:

- $\exp z$ 处处解析, 且 $(\exp z)' = \exp z$.
- $\exp z \neq 0$.

定义. 指数函数

$$\exp z := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

为了方便, 我们也记 $\mathbf{e}^z = \exp z$. 指数函数有如下性质:

- $\exp z$ 处处解析, 且 $(\exp z)' = \exp z$.
- $\exp z \neq 0$.
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$.

指数函数的性质

定义. 指数函数

$$\exp z := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

为了方便, 我们也记 $\mathbf{e}^z = \exp z$. 指数函数有如下性质:

- $\exp z$ 处处解析, 且 $(\exp z)' = \exp z$.
- $\exp z \neq 0$.
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$.
- $\exp(z + 2k\pi\mathrm{i}) = \exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi\mathrm{i}$.

定义. 指数函数

$$\exp z := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

为了方便, 我们也记 $\mathrm{e}^z = \exp z$. 指数函数有如下性质:

- $\exp z$ 处处解析, 且 $(\exp z)' = \exp z$.
- $\exp z \neq 0$.
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$.
- $\exp(z + 2k\pi\mathrm{i}) = \exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi\mathrm{i}$.
- $\exp z_1 = \exp z_2$ 当且仅当 $z_1 = z_2 + 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}$.

指数函数的性质

定义. 指数函数

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

为了方便，我们也记 $\mathbf{e^z = \exp z}$. 指数函数有如下性质:

- $\exp z$ 处处解析，且 $(\exp z)' = \exp z$.
- $\exp z \neq 0$.
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$.
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$，即 $\exp z$ 周期为 $2\pi i$.
- $\exp z_1 = \exp z_2$ 当且仅当 $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.
- 指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映为圆周族 $|w| = e^c$，将直线族 $\operatorname{Im} z = c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg} w = c$.

例题：指数函数的周期

例. 计算函数 $f(z) = \exp(z/6)$ 的周期.

例题：指数函数的周期

例. 计算函数 $f(z)=\exp(z/6)$ 的周期.

解答. 设 $f(z_1)=f(z_2)$, 则 $\mathrm{e}^{z_1/6}=\mathrm{e}^{z_2/6}$.

例题：指数函数的周期

例. 计算函数 $f(z)=\exp(z/6)$ 的周期.

解答. 设 $f(z_1)=f(z_2)$, 则 $\mathrm{e}^{z_1/6}=\mathrm{e}^{z_2/6}$. 因此存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6}=\frac{z_2}{6}+2k\pi\mathrm{i},$$

例题：指数函数的周期

例. 计算函数 $f(z)=\exp(z/6)$ 的周期.

解答. 设 $f(z_1)=f(z_2)$, 则 $e^{z_1/6}=e^{z_2/6}$. 因此存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6}=\frac{z_2}{6}+2k\pi i,$$

从而 $z_1-z_2=12k\pi i$.

例题：指数函数的周期

例. 计算函数 $f(z)=\exp(z/6)$ 的周期.

解答. 设 $f(z_1)=f(z_2)$, 则 $\mathrm{e}^{z_1/6}=\mathrm{e}^{z_2/6}$. 因此存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6}=\frac{z_2}{6}+2k\pi\mathrm{i},$$

从而 $z_1-z_2=12k\pi\mathrm{i}$. 所以 $f(z)$ 的周期是 $12\pi\mathrm{i}$.

例. 计算函数 $f(z) = \exp(z/6)$ 的周期.

解答. 设 $f(z_1) = f(z_2)$, 则 $\mathrm{e}^{z_1/6} = \mathrm{e}^{z_2/6}$. 因此存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6} = \frac{z_2}{6} + 2k\pi\mathrm{i},$$

从而 $z_1 - z_2 = 12k\pi\mathrm{i}$. 所以 $f(z)$ 的周期是 $12\pi\mathrm{i}$.

一般地, $\exp(az+b)$ 的周期是 $\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{a}$ (或写成 $-\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{a}$), $a \neq 0$.

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数.

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢?

对数函数

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数.

对数函数

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支.

对数函数

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写.

对数函数

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 $\operatorname{Arg} z$ 和 $\arg z$.

对数函数

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 $\operatorname{Arg} z$ 和 $\arg z$.

设 $z \neq 0, \mathrm{e}^w = z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\ln r + \mathrm{i}\theta}$,

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 $\operatorname{Arg} z$ 和 $\arg z$.

设 $z \neq 0, \mathrm{e}^w = z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\ln r + \mathrm{i}\theta}$, 则

$$w = \ln r + \mathrm{i}\theta + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对数函数及其主值

定义.

对数函数及其主值

定义.

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

对数函数及其主值

定义.

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

(2) 定义对数函数主值

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z.$$

对数函数及其主值

定义.

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

(2) 定义对数函数主值

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z.$$

对于每一个整数 k, $\ln z + 2k\pi\mathrm{i}$ 都给出了 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值分支.

对数函数及其主值

定义.

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

(2) 定义对数函数主值

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z.$$

对于每一个整数 k, $\ln z + 2k\pi\mathrm{i}$ 都给出了 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值分支. 特别地, 当 $z = x > 0$ 是正实数时, $\ln z$ 就是实变的对数函数.

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\mathrm{Ln}\,2, \mathrm{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\mathrm{Ln}\,2, \mathrm{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解答.

例. 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解答.

(1)

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z},$$

例. 求 $\mathrm{Ln}\,2, \mathrm{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解答.

(1)

$$\mathrm{Ln}\,2 = \ln 2 + 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 $\ln 2$.

例. 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解答.

(1)

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 $\ln 2$.

(2)

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z},$$

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\mathrm{Ln}\,2, \mathrm{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解答.

(1)

$$\mathrm{Ln}\,2 = \ln 2 + 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 $\ln 2$.

(2)

$$\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(-1) = (2k+1)\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 $\pi\mathrm{i}$.

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\operatorname{Ln}(-2+3\mathrm{i}), \operatorname{Ln}(3-\sqrt{3}\mathrm{i})$.

典型例题：对数函数的计算

例. 求 $\mathrm{Ln}(-2+3\mathrm{i}), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}\mathrm{i})$.

解答.

例. 求 $\mathrm{Ln}(-2+3\mathrm{i}), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}\mathrm{i})$.

解答.

(1)

$$\mathrm{Ln}(-2+3\mathrm{i}) = \ln|-2+3\mathrm{i}| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(-2+3\mathrm{i})$$

例. 求 $\mathrm{Ln}(-2+3\mathrm{i}), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}\mathrm{i})$.

解答.

(1)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(-2+3\mathrm{i}) &= \ln|-2+3\mathrm{i}| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(-2+3\mathrm{i})\\ &= \frac{1}{2}\ln 13 + \Big(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\Big)\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

例. 求 $\operatorname{Ln}(-2+3\mathrm{i}), \operatorname{Ln}(3-\sqrt{3}\mathrm{i})$.

解答.

(1)

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(-2+3\mathrm{i}) &= \ln|-2+3\mathrm{i}| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(-2+3\mathrm{i}) \\ &= \frac{1}{2}\ln 13 + \Big(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\Big)\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(2)

$$\operatorname{Ln}(3-\sqrt{3}\mathrm{i}) = \ln|3-\sqrt{3}\mathrm{i}| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(3-\sqrt{3}\mathrm{i})$$

例. 求 $\mathrm{Ln}(-2+3\mathrm{i}), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}\mathrm{i})$.

解答.

(1)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(-2+3\mathrm{i}) &= \ln|-2+3\mathrm{i}| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(-2+3\mathrm{i}) \\ &= \frac{1}{2}\ln 13 + \Big(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\Big)\mathrm{i}, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}\mathrm{i}) &= \ln|3-\sqrt{3}\mathrm{i}| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(3-\sqrt{3}\mathrm{i}) \\ &= \ln 2\sqrt{3} + \Big(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\Big)\mathrm{i} = \ln 2\sqrt{3} + \Big(2k - \frac{1}{6}\Big)\pi\mathrm{i}, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

例. 解方程 $\mathrm{e}^z - 1 - \sqrt{3}\mathrm{i} = 0.$

例. 解方程 $\mathrm{e}^z - 1 - \sqrt{3}\mathrm{i} = 0$.

解答. 由于 $1 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}$,

例. 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

解答. 由于 $1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$，因此

$$z = \mathrm{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

例. 解方程 $\mathrm{e}^z - 1 - \sqrt{3}\mathrm{i} = 0$.

解答. 由于 $1 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}}$, 因此

$$z = \mathrm{Ln}(1 + \sqrt{3}\mathrm{i}) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi \mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

练习. 求 $\ln(-1 - \sqrt{3}\mathrm{i}) =$__________.

典型例题：对数函数的计算

例. 解方程 $e^z-1-\sqrt{3}i=0$.

解答. 由于 $1+\sqrt{3}i=2e^{\frac{\pi i}{3}}$, 因此

$$z=\operatorname{Ln}(1+\sqrt{3}i)=\ln 2+\Big(2k+\frac{1}{3}\Big)\pi i,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

练习. 求 $\ln(-1-\sqrt{3}i)=\underline{\ln 2-\dfrac{2\pi i}{3}}$.

对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + \operatorname{Ln} 1 = \ln z + 2k\pi \mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + \operatorname{Ln} 1 = \ln z + 2k\pi \mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及辐角主值的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + \operatorname{Ln} 1 = \ln z + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及辐角主值的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

而当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$ **不成立**.

对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + \operatorname{Ln} 1 = \ln z + 2k\pi \mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及辐角主值的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

而当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$ 不成立. 以上等式换成 $\ln z$ 均未必成立.

对数函数的导数

设 x 是正实数,

对数函数的导数

设 x 是正实数, 则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi\mathrm{i}, \qquad \lim_{y\to 0^-} \ln(-x+y\mathrm{i}) = \ln x - \pi\mathrm{i},$$

设 x 是正实数, 则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi \mathrm{i}, \qquad \lim_{y \to 0^-} \ln(-x + y\mathrm{i}) = \ln x - \pi \mathrm{i},$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.

对数函数的导数

设 x 是正实数, 则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi\mathrm{i}, \qquad \lim_{y\to 0^-} \ln(-x + y\mathrm{i}) = \ln x - \pi\mathrm{i},$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数,

设 x 是正实数, 则

$$\ln(-x)=\ln x+\pi \mathrm{i},\qquad \lim_{y\to 0^-}\ln(-x+y\mathrm{i})=\ln x-\pi\mathrm{i},$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方 $-\pi<\arg z<\pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi<\operatorname{Im} z<\pi$ 上的单值反函数, 从而 $(\ln z)'=\dfrac{1}{z}$, $\ln z$ 在除负实轴和零处的区域解析.

对数函数的导数

设 x 是正实数, 则

$$\ln(-x)=\ln x+\pi\mathrm{i},\quad \lim_{y\to 0^-}\ln(-x+y\mathrm{i})=\ln x-\pi\mathrm{i},$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方 $-\pi<\arg z<\pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi<\operatorname{Im} z<\pi$ 上的单值反函数, 从而 $(\ln z)'=\dfrac{1}{z}$, $\ln z$ 在除负实轴和零处的区域解析.

也可以通过 C-R 方程来得到 $\ln z$ 的解析性和导数: 当 $x>0$ 时,

$$\ln z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}\arctan\frac{y}{x},$$

设 x 是正实数, 则

$$\ln(-x)=\ln x+\pi\mathrm{i},\qquad \lim_{y\to 0^-}\ln(-x+y\mathrm{i})=\ln x-\pi\mathrm{i},$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方 $-\pi<\arg z<\pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi<\operatorname{Im} z<\pi$ 上的单值反函数, 从而 $(\ln z)'=\dfrac{1}{z}$, $\ln z$ **在除负实轴和零处的区域解析**.

也可以通过 C-R 方程来得到 $\ln z$ 的解析性和导数: 当 $x>0$ 时,

$$\ln z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}\arctan\frac{y}{x},$$

$$u_x=v_y=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad v_x=-u_y=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$(\ln z)'=\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{1}{z}.$$

其它情形可取虚部为 $\operatorname{arccot}\dfrac{x}{y}$ 或 $\operatorname{arccot}\dfrac{x}{y}-\pi$ 类似证明.

幂函数的性质：a 为整数时

定义.

定义.

(1) 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^a = \mathrm{e}^{a \operatorname{Ln} z} = \exp\big(a \ln|z| + \mathrm{i}a(\arg z + 2k\pi)\big), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

幂函数的性质：a 为整数时

定义.

(1) 设 $a \neq 0$，$z \neq 0$，定义幂函数

$$w = z^a = \mathrm{e}^{a \operatorname{Ln} z} = \exp\big(a \ln|z| + \mathrm{i}a(\arg z + 2k\pi)\big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = \mathrm{e}^{a \ln z} = \exp\big(a \ln|z| + \mathrm{i}a \arg z\big).$$

幂函数的性质：a 为整数时

定义.

(1) 设 $a \neq 0$，$z \neq 0$，定义**幂函数**

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp\big(a \ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)\big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) **幂函数的主值**为

$$w = e^{a \ln z} = \exp\big(a \ln|z| + ia \arg z\big).$$

根据 a 的不同，这个函数有着不同的性质.

定义.

(1) 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义**幂函数**

$$w = z^a = \mathrm{e}^{a \operatorname{Ln} z} = \exp\big(a \ln|z| + \mathrm{i}a(\arg z + 2k\pi)\big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) **幂函数的主值**为

$$w = \mathrm{e}^{a \ln z} = \exp\big(a \ln|z| + \mathrm{i}a \arg z\big).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 因为 $\mathrm{e}^{2ak\pi \mathrm{i}} = 1$, 所以 $w = z^a$ 是单值的.

定义.

(1) 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义**幂函数**

$$w = z^a = \mathrm{e}^{a \operatorname{Ln} z} = \exp\big(a \ln|z| + \mathrm{i}a(\arg z + 2k\pi)\big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) **幂函数的主值**为

$$w = \mathrm{e}^{a \ln z} = \exp\big(a \ln|z| + \mathrm{i}a \arg z\big).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 因为 $\mathrm{e}^{2ak\pi \mathrm{i}} = 1$, 所以 $w = z^a$ 是单值的. 此时 z^a 就是我们之前定义的乘幂.

幂函数的性质：a 为整数时

定义.

(1) 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义**幂函数**

$$w = z^a = \mathrm{e}^{a\,\mathrm{Ln}\,z} = \exp\big(a\ln|z| + \mathrm{i}a(\arg z + 2k\pi)\big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) **幂函数的主值**为

$$w = \mathrm{e}^{a\ln z} = \exp\big(a\ln|z| + \mathrm{i}a\arg z\big).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 因为 $\mathrm{e}^{2ak\pi\mathrm{i}} = 1$, 所以 $w = z^a$ 是单值的. 此时 z^a 就是我们之前定义的乘幂.

当 a 是非负整数时, z^a 在复平面上解析;

幂函数的性质：a 为整数时

定义.

(1) 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义**幂函数**

$$w = z^a = \mathrm{e}^{a\,\mathrm{Ln}\, z} = \exp\big(a\ln|z| + \mathrm{i}a(\arg z + 2k\pi)\big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) **幂函数的主值**为

$$w = \mathrm{e}^{a\ln z} = \exp\big(a\ln|z| + \mathrm{i}a\arg z\big).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 因为 $\mathrm{e}^{2ak\pi\mathrm{i}} = 1$, 所以 $w = z^a$ 是单值的. 此时 z^a 就是我们之前定义的乘幂.

当 a 是非负整数时, z^a 在复平面上解析; 当 a 是负整数时, z^a 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上解析.

当 $a=\dfrac{p}{q}$ 为分数，p,q 为互质的整数且 $q>1$ 时，

幂函数的性质：a 为分数时

当 $a = \dfrac{p}{q}$ 为分数，p, q 为互质的整数且 $q > 1$ 时，

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left(\frac{\mathrm{i}p(\arg z + 2k\pi)}{q}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, q-1$$

具有 q 个值.

幂函数的性质: a 为分数时

当 $a=\dfrac{p}{q}$ 为分数, p,q 为互质的整数且 $q>1$ 时,

$$z^{\frac{p}{q}}=|z|^{\frac{p}{q}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}p(\arg z+2k\pi)}{q}\right),\quad k=0,1,\ldots,q-1$$

具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w=\exp(a\ln z)$ 是处处解析的.

当 $a=\dfrac{p}{q}$ 为分数，p, q 为互质的整数且 $q>1$ 时，

$$z^{\frac{p}{q}}=|z|^{\frac{p}{q}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}p(\arg z+2k\pi)}{q}\right),\quad k=0,1,\ldots,q-1$$

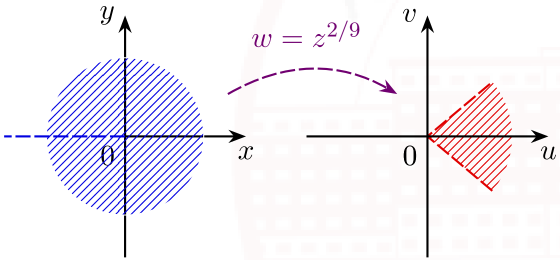
具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后，它的主值 $w=\exp(a\ln z)$ 是处处解析的. 事实上它就是 $\sqrt[q]{z^p}=(\sqrt[q]{z})^p$.

幂函数的性质：a 为分数时

当 $a=\dfrac{p}{q}$ 为分数, p,q 为互质的整数且 $q>1$ 时,

$$z^{\frac{p}{q}}=|z|^{\frac{p}{q}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}p(\arg z+2k\pi)}{q}\right),\qquad k=0,1,\dots,q-1$$

具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w=\exp(a\ln z)$ 是处处解析的. 事实上它就是 $\sqrt[q]{z^p}=(\sqrt[q]{z})^p$.



幂函数的性质：a 为其他情形

对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值.

幂函数的性质: a 为其他情形

对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi a\mathrm{i}$ 不可能是 $2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍.

对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi a\mathrm{i}$ 不可能是 $2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值.

对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k\neq 0$ 时, $2k\pi a\mathrm{i}$ 不可能是 $2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后,

幂函数的性质: a 为其他情形

对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi a\mathrm{i}$ 不可能是 $2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 也是处处解析的.

幂函数的性质：a 为其他情形

对于其它的 a，z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时，$2k\pi a\mathrm{i}$ 不可能是 $2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后，它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 也是处处解析的.

a	z^a 的值	z^a 的解析区域
整数 n	单值	$n \geqslant 0$ 时处处解析 $n < 0$ 时除零点外解析
分数 p/q	q 值	除负实轴和零点外解析
无理数或虚数	无穷多值	除负实轴和零点外解析

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i}.

典型例题：幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i}.

解答.

$$1^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1}$$

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i}.

解答.

$$1^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\cdot 2k\pi\mathrm{i}}$$

典型例题：幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i}.

解答.

$$1^{\sqrt{2}}=\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1}=\mathrm{e}^{\sqrt{2}\cdot 2k\pi\mathrm{i}}=\cos(2\sqrt{2}k\pi)+\mathrm{i}\sin(2\sqrt{2}k\pi),k\in\mathbb{Z}.$$

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i}.

解答.

$$1^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\cdot 2k\pi\mathrm{i}} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + \mathrm{i}\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}}$$

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i}.

解答.

$$1^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\cdot 2k\pi\mathrm{i}} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + \mathrm{i}\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}} = \exp\left(\mathrm{i}\cdot\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\mathrm{i}\right)$$

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i}.

解答.

$$1^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\cdot 2k\pi\mathrm{i}} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + \mathrm{i}\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}} = \exp\left(\mathrm{i}\cdot\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\mathrm{i}\right) = \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i}.

解答.

$$1^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\cdot 2k\pi\mathrm{i}} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + \mathrm{i}\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}} = \exp\left(\mathrm{i}\cdot\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\mathrm{i}\right) = \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

练习. 3^{i} 的辐角主值是______.

典型例题：幂函数的计算

例. 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i}.

解答.

$$1^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\cdot 2k\pi\mathrm{i}} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + \mathrm{i}\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}} = \exp\left(\mathrm{i}\cdot\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\mathrm{i}\right) = \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

练习. 3^{i} 的辐角主值是 $\underline{\ \ln 3\ }$.

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = \mathrm{e}^{a \ln z} \cdot 1^a = \mathrm{e}^{a \ln z} \cdot \mathrm{e}^{2ak\pi \mathrm{i}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

幂函数的性质

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = \mathrm{e}^{a\ln z} \cdot 1^a = \mathrm{e}^{a\ln z} \cdot \mathrm{e}^{2ak\pi\mathrm{i}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = \left(\mathrm{e}^{a\ln z}\right)' = \frac{a\mathrm{e}^{a\ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = e^{a\ln z} \cdot 1^a = e^{a\ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = \left(e^{a\ln z}\right)' = \frac{ae^{a\ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = \mathrm{e}^{a\ln z} \cdot 1^a = \mathrm{e}^{a\ln z} \cdot \mathrm{e}^{2ak\pi\mathrm{i}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = \left(\mathrm{e}^{a\ln z}\right)' = \frac{a\mathrm{e}^{a\ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z) = \mathrm{e}^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z) = z^a$ 在 e 处的值是不同的.

幂函数的性质

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = \mathrm{e}^{a\ln z}\cdot 1^a = \mathrm{e}^{a\ln z}\cdot \mathrm{e}^{2ak\pi\mathrm{i}},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = \left(\mathrm{e}^{a\ln z}\right)' = \frac{a\mathrm{e}^{a\ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a\cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z)=z^a$ 在 e 处的值是不同的. 因为后者在 $a\notin\mathbb{Z}$ 时总是多值的.

幂函数的性质

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = \mathrm{e}^{a\ln z} \cdot 1^a = \mathrm{e}^{a\ln z} \cdot \mathrm{e}^{2ak\pi\mathrm{i}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = \left(\mathrm{e}^{a\ln z}\right)' = \frac{a\mathrm{e}^{a\ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z) = \mathrm{e}^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z) = z^a$ 在 e 处的值是不同的. 因为后者在 $a \notin \mathbb{Z}$ 时总是多值的. 前者实际上是后者的主值.

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = \mathrm{e}^{a\ln z} \cdot 1^a = \mathrm{e}^{a\ln z} \cdot \mathrm{e}^{2ak\pi \mathrm{i}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = \left(\mathrm{e}^{a\ln z}\right)' = \frac{a\mathrm{e}^{a\ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z) = \mathrm{e}^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z) = z^a$ 在 e 处的值是不同的. 因为后者在 $a \notin \mathbb{Z}$ 时总是多值的. 前者实际上是后者的主值. 为避免混淆, 以后我们总默认 e^a 表示指数函数 $\exp a$.

三角函数的定义

我们知道

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

对于任意实数 x 成立,

我们知道

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

对于任意实数 x 成立，我们将其推广到复数情形.

我们知道

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

对于任意实数 x 成立，我们将其推广到复数情形.

定义. 余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \quad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

三角函数的定义

我们知道

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

对于任意实数 x 成立，我们将其推广到复数情形.

定义. 余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \quad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

那么欧拉恒等式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$ **对任意复数 z 均成立**.

不难得到

$$\cos(\mathrm{i}y) = \frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2},$$

不难得到

$$\cos(\mathrm{i}y)=\frac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2},\qquad \sin(\mathrm{i}y)=\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}.$$

三角函数的性质

不难得到

$$\cos(\mathrm{i}y) = \frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2}, \qquad \sin(\mathrm{i}y) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2}.$$

当 $y \to \infty$ 时, $\cos(\mathrm{i}y)$ 和 $\sin(\mathrm{i}y)$ 都 $\to \infty$.

不难得到

$$\cos(\mathrm{i}y)=\frac{\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}}{2},\qquad \sin(\mathrm{i}y)=\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}}{2}.$$

当 $y\to\infty$ 时, $\cos(\mathrm{i}y)$ 和 $\sin(\mathrm{i}y)$ 都 $\to\infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界.

不难得到

$$\cos(\mathrm{i}y) = \frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2}, \qquad \sin(\mathrm{i}y) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2}.$$

当 $y \to \infty$ 时, $\cos(\mathrm{i}y)$ 和 $\sin(\mathrm{i}y)$ 都 $\to \infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形完全不同.

不难得到

$$\cos(\mathrm{i}y)=\frac{\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}}{2},\qquad \sin(\mathrm{i}y)=\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}}{2}.$$

当 $y\to\infty$ 时, $\cos(\mathrm{i}y)$ 和 $\sin(\mathrm{i}y)$ 都 $\to\infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形完全不同.

容易看出 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的零点都是实数.

不难得到

$$\cos(\mathrm{i}y)=\frac{\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}}{2},\qquad \sin(\mathrm{i}y)=\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}}{2}.$$

当 $y\to\infty$ 时, $\cos(\mathrm{i}y)$ 和 $\sin(\mathrm{i}y)$ 都 $\to\infty$. 因此 $\sin z$ **和** $\cos z$ **并不有界**. 这和实变情形完全不同.

容易看出 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的零点都是实数. 于是我们可类似定义其它三角函数

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\ z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z},\ z\neq k\pi,$$

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\ z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad \csc z=\frac{1}{\sin z},\ z\neq k\pi.$$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立,

三角函数的性质

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$,

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$,
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$,

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$,
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

类似的，我们可以定义双曲函数:

双曲函数

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2} = \cos \mathrm{i}z,$$

双曲函数

类似的，我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} = \cos \mathrm{i}z,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} = -\mathrm{i} \sin \mathrm{i}z,$$

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} = \cos \mathrm{i}z,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} = -\mathrm{i} \sin \mathrm{i}z,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}} = -\mathrm{i} \tan \mathrm{i}z, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \mathrm{i}.$$

双曲函数

类似的，我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} = \cos \mathrm{i}z,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} = -\mathrm{i} \sin \mathrm{i}z,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}} = -\mathrm{i} \tan \mathrm{i}z, \quad z \neq \Big(k + \frac{1}{2}\Big)\pi \mathrm{i}.$$

它们的奇偶性和导数与实变情形类似，在定义域范围内是处处解析的.

双曲函数

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} = \cos \mathrm{i}z,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} = -\mathrm{i} \sin \mathrm{i}z,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}} = -\mathrm{i} \tan \mathrm{i}z, \quad z \neq \Big(k + \frac{1}{2}\Big)\pi \mathrm{i}.$$

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

$\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ 的周期是 $2\pi\mathrm{i}$, $\operatorname{th} z$ 的周期是 $\pi\mathrm{i}$.

反三角函数和反双曲函数

设 $z = \cos w = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$,

设 $z=\cos w=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$, 则

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}-2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+1=0,$$

设 $z=\cos w=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$, 则

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}-2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+1=0,\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=z+\sqrt{z^2-1}\ (\text{双值}).$$

反三角函数和反双曲函数

设 $z=\cos w=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$, 则

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}-2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+1=0,\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=z+\sqrt{z^2-1}\text{ (双值)}.$$

因此反余弦函数为

$$w=\operatorname{Arccos}z=-\mathrm{i}\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

设 $z = \cos w = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$, 则

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w} - 2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + 1 = 0, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值)}.$$

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -\mathrm{i}\,\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的.

设 $z=\cos w=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$, 则

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}-2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+1=0,\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=z+\sqrt{z^2-1}\text{ (双值)}.$$

因此反余弦函数为

$$w=\operatorname{Arccos} z=-\mathrm{i}\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

设 $z = \cos w = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$, 则

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w} - 2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + 1 = 0, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = z + \sqrt{z^2 - 1}\ (\text{双值}).$$

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -\mathrm{i}\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z = -\mathrm{i}\operatorname{Ln}(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2})$;

反三角函数和反双曲函数

设 $z=\cos w=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$, 则

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}-2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+1=0,\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=z+\sqrt{z^2-1}\ (\text{双值}).$$

因此反余弦函数为

$$w=\operatorname{Arccos} z=-\mathrm{i}\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z=-\mathrm{i}\operatorname{Ln}(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2})$;
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z=-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}, z\neq\pm\mathrm{i}$;

设 $z=\cos w=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$, 则

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}-2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+1=0,\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=z+\sqrt{z^2-1}\ (\text{双值}).$$

因此反余弦函数为

$$w=\operatorname{Arccos} z=-\mathrm{i}\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z=-\mathrm{i}\operatorname{Ln}(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2})$;
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z=-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}, z\neq\pm\mathrm{i}$;
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$;

反三角函数和反双曲函数

设 $z=\cos w=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$, 则

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}-2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+1=0,\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=z+\sqrt{z^2-1}\ \text{(双值)}.$$

因此反余弦函数为

$$w=\operatorname{Arccos} z=-\mathrm{i}\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z=-\mathrm{i}\operatorname{Ln}(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2})$;
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z=-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}, z\neq\pm\mathrm{i}$;
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$;
- 反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$;

设 $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值)}.$$

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$;
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z = -\dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1 + iz}{1 - iz}, z \neq \pm i$;
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$;
- 反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$;
- 反双曲正切函数 $\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1 + z}{1 - z}, z \neq \pm 1$.

典型例题：解三角函数方程

例. 解方程 $\sin z = 2$.

例. 解方程 $\sin z = 2$.

解答. 由于 $\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = 2$,

例. 解方程 $\sin z = 2$.

解答. 由于 $\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = 2$, 我们有

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 4\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1 = 0.$$

典型例题：解三角函数方程

例. 解方程 $\sin z = 2$.

解答. 由于 $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$, 我们有

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

于是 $e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$,

例. 解方程 $\sin z = 2$.

解答. 由于 $\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = 2$, 我们有

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 4\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1 = 0.$$

于是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = (2 \pm \sqrt{3})\mathrm{i}$,

$$z = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\big((2 \pm \sqrt{3})\mathrm{i}\big) = \Big(2k + \frac{1}{2}\Big)\pi \pm \mathrm{i}\ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

典型例题：解三角函数方程

另解. 由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

另解. 由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

于是 $e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z = (2 \pm \sqrt{3})\mathrm{i}$,

另解. 由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1-\sin^2 z} = \pm\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

于是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z = (2\pm\sqrt{3})\mathrm{i}$,

$$z = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}((2\pm\sqrt{3})\mathrm{i}) = \Big(2k+\frac{1}{2}\Big)\pi \pm \mathrm{i}\ln(2+\sqrt{3}), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

典型例题：解三角函数方程

另解. 由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1-\sin^2 z} = \pm\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

于是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z = (2\pm\sqrt{3})\mathrm{i}$,

$$z = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}((2\pm\sqrt{3})\mathrm{i}) = \Big(2k+\frac{1}{2}\Big)\pi \pm \mathrm{i}\ln(2+\sqrt{3}), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

对于任意 z，总存在 θ 使得

$$\begin{aligned} \mathrm{Arcsin}\, z &= (2k+\frac{1}{2})\pi \pm \theta, \\ \mathrm{Arccos}\, z &= 2k\pi \pm \theta, \\ \mathrm{Arctan}\, z &= k\pi + \theta, \quad (z \neq \pm\mathrm{i}). \end{aligned}$$

称分子次数小于分母次数的有理函数为**真分式**.

有理函数分拆

称分子次数小于分母次数的有理函数为**真分式**. 任何一个有理函数 $f(z)$ 都可以通过带余除法分解为一个多项式 $g(z)$ 和一个真分式之和.

有理函数分拆

称分子次数小于分母次数的有理函数为**真分式**. 任何一个有理函数 $f(z)$ 都可以通过带余除法分解为一个多项式 $g(z)$ 和一个真分式之和.

若这个有理函数分母的零点均能求出, 则这个真分式又可以分拆为部分分式之和, 其中**部分分式**是指形如 $\dfrac{a}{(x-b)^k}$ 的真分式.

称分子次数小于分母次数的有理函数为**真分式**. 任何一个有理函数 $f(z)$ 都可以通过带余除法分解为一个多项式 $g(z)$ 和一个真分式之和.

若这个有理函数分母的零点均能求出, 则这个真分式又可以分拆为部分分式之和, 其中**部分分式**是指形如 $\dfrac{a}{(x-b)^k}$ 的真分式. 我们来介绍求这种分拆的一种方法.

例题：有理函数分拆

例. 将 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 展开成部分分式之和.

例题：有理函数分拆

例. 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 展开成部分分式之和.

解答. 设 $f(z)=\dfrac{a}{z-1}+\dfrac{b}{z-2}+\dfrac{c}{(z-2)^2}$,

例题：有理函数分拆

例. 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 展开成部分分式之和.

解答. 设 $f(z)=\dfrac{a}{z-1}+\dfrac{b}{z-2}+\dfrac{c}{(z-2)^2}$, 则

$$a=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\frac{1}{(z-2)^2}=1,$$

例题：有理函数分拆

例. 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 展开成部分分式之和.

解答. 设 $f(z)=\dfrac{a}{z-1}+\dfrac{b}{z-2}+\dfrac{c}{(z-2)^2}$, 则

$$a=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-2)^2}=1,$$

$$b=\lim_{z\to 2}\big((z-2)^2f(z)\big)'=\lim_{z\to 2}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)'=-1,$$

例题：有理函数分拆

例. 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 展开成部分分式之和.

解答. 设 $f(z)=\dfrac{a}{z-1}+\dfrac{b}{z-2}+\dfrac{c}{(z-2)^2}$, 则

$$a=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\frac{1}{(z-2)^2}=1,$$

$$b=\lim_{z\to2}\big((z-2)^2f(z)\big)'=\lim_{z\to2}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)'=-1,$$

$$c=\lim_{z\to2}(z-2)^2f(z)=\lim_{z\to2}\frac{1}{z-1}=1.$$

例题：有理函数分拆

例. 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 展开成部分分式之和.

解答. 设 $f(z)=\dfrac{a}{z-1}+\dfrac{b}{z-2}+\dfrac{c}{(z-2)^2}$, 则

$$a=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\frac{1}{(z-2)^2}=1,$$

$$b=\lim_{z\to2}\left((z-2)^2f(z)\right)'=\lim_{z\to2}\left(\frac{1}{z-1}\right)'=-1,$$

$$c=\lim_{z\to2}(z-2)^2f(z)=\lim_{z\to2}\frac{1}{z-1}=1.$$

因此

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}.$$

得到这种分拆之后, 我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

得到这种分拆之后，我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的 n 阶导数.

得到这种分拆之后, 我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的 n 阶导数.

解答. 设

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{\mathrm{i}}{2}\Big(\frac{1}{z+\mathrm{i}}-\frac{1}{z-\mathrm{i}}\Big),$$

得到这种分拆之后, 我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的 n 阶导数.

解答. 设

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{z+\mathrm{i}}-\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right),$$

则它在除 $z=\pm\mathrm{i}$ 外处处解析,

得到这种分拆之后, 我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的 n 阶导数.

解答. 设

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{\mathrm{i}}{2}\Big(\frac{1}{z+\mathrm{i}}-\frac{1}{z-\mathrm{i}}\Big),$$

则它在除 $z=\pm\mathrm{i}$ 外处处解析, 且

$$f^{(n)}(z)=\frac{\mathrm{i}}{2}\Big(\frac{1}{z+\mathrm{i}}-\frac{1}{z-\mathrm{i}}\Big)^{(n)}$$

得到这种分拆之后, 我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的 n 阶导数.

解答. 设

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{z+\mathrm{i}}-\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right),$$

则它在除 $z=\pm\mathrm{i}$ 外处处解析, 且

$$f^{(n)}(z)=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{z+\mathrm{i}}-\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right)^{(n)}=\frac{\mathrm{i}}{2}\cdot(-1)^n n!\left(\frac{1}{(z+\mathrm{i})^{n+1}}-\frac{1}{(z-\mathrm{i})^{n+1}}\right)$$

得到这种分拆之后，我们可以求出该有理函数的任意阶导数.

例. 计算 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的 n 阶导数.

解答. 设

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{z+\mathrm{i}}-\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right),$$

则它在除 $z=\pm\mathrm{i}$ 外处处解析，且

$$\begin{aligned}f^{(n)}(z)&=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{z+\mathrm{i}}-\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right)^{(n)}=\frac{\mathrm{i}}{2}\cdot(-1)^n n!\left(\frac{1}{(z+\mathrm{i})^{n+1}}-\frac{1}{(z-\mathrm{i})^{n+1}}\right)\\&=(-1)^{n+1}n!\,\mathrm{Im}\,(z+\mathrm{i})^{-n-1}.\end{aligned}$$

当 $z=x$ 为实数时,

$$|x+\mathrm{i}|=\sqrt{x^2+1}, \qquad \arg(x+\mathrm{i})=\operatorname{arccot} x,$$

有理函数的导数

当 $z=x$ 为实数时,

$$|x+\mathrm{i}|=\sqrt{x^2+1},\qquad \arg(x+\mathrm{i})=\operatorname{arccot}x,$$

于是

$$\frac{1}{(z\pm\mathrm{i})^{n+1}}=(x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(n+1)\operatorname{arccot}x}.$$

有理函数的导数

当 $z=x$ 为实数时,

$$|x+\mathrm{i}|=\sqrt{x^2+1},\qquad \arg(x+\mathrm{i})=\operatorname{arccot}x,$$

于是

$$\frac{1}{(z\pm\mathrm{i})^{n+1}}=(x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(n+1)\operatorname{arccot}x}.$$

因此

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}=(-1)^n n!(x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}}\sin\big((n+1)\operatorname{arccot}x\big).$$

我们还可以利用复对数函数来计算实有理函数的不定积分.

我们还可以利用复对数函数来计算实有理函数的不定积分.

例. 计算 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x.$

我们还可以利用复对数函数来计算实有理函数的不定积分.

例. 计算 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$.

解答. 设 $\zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}} = \dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$,

我们还可以利用复对数函数来计算实有理函数的不定积分.

例. 计算 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x.$

解答. 设 $\zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}} = \dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 那么我们有分拆

$$f(x) = \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{x-1} + \frac{\zeta}{x-\zeta} + \frac{\zeta^2}{x-\zeta^2}\Big),$$

我们还可以利用复对数函数来计算实有理函数的不定积分.

例. 计算 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$.

解答. 设 $\zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}} = \dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 那么我们有分析

$$f(x) = \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{x-1} + \frac{\zeta}{x-\zeta} + \frac{\zeta^2}{x-\zeta^2}\Big),$$

设

$$g(z) = \frac{1}{3}(\ln(z-1) + \zeta\ln(z-\zeta) + \zeta^2\ln(z-\zeta^2)).$$

$g(z)$ 在复平面去掉三条射线 $x+\zeta^k, x \leqslant 0$ 内的导数为 $f(z)$.

$g(z)$ 在复平面去掉三条射线 $x+\zeta^k, x\leqslant 0$ 内的导数为 $f(z)$. 当 $z=x>1$ 时,

$$3g(z)-\ln(x-1)=2\operatorname{Re}(\zeta\ln(x-\zeta))=2\operatorname{Re}\Big(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\ln\Big(x-\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\Big)\Big)$$

$$=2\operatorname{Re}\Big(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\Big(\ln\sqrt{x^2+x+1}-\mathrm{i}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)\Big)$$

$$=\ln\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

$g(z)$ 在复平面去掉三条射线 $x+\zeta^k, x \leqslant 0$ 内的导数为 $f(z)$. 当 $z=x>1$ 时,

$$3g(z)-\ln(x-1)=2\operatorname{Re}(\zeta\ln(x-\zeta))=2\operatorname{Re}\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\ln\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)\right)$$

$$=2\operatorname{Re}\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\left(\ln\sqrt{x^2+x+1}-\mathrm{i}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$=\ln\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

于是我们得到当 $x>1$ 时,

$$g(x)=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

$g(z)$ 在复平面去掉三条射线 $x+\zeta^k, x\leqslant 0$ 内的导数为 $f(z)$. 当 $z=x>1$ 时,

$$\begin{aligned} 3g(z)-\ln(x-1) &= 2\operatorname{Re}(\zeta\ln(x-\zeta)) = 2\operatorname{Re}\Big(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\ln\Big(x-\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\Big)\Big) \\ &= 2\operatorname{Re}\Big(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\Big(\ln\sqrt{x^2+x+1}-\mathrm{i}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)\Big) \\ &= \ln\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

于是我们得到当 $x>1$ 时,

$$g(x)=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arccot}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

可以看出对于实数 $x<1$, 上式的导数也等于 $f(x)$, 从而 $f(x)$ 的不定积分为 $g(x)+C$, $C\in\mathbb{R}$.