



合肥工业大学

HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## 复变函数与积分变换

---

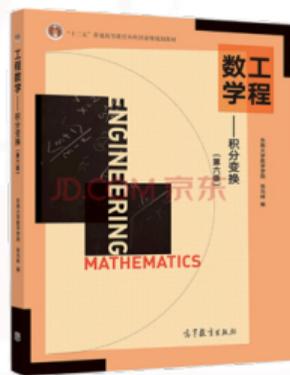
张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: [zhangshenxing@hfut.edu.cn](mailto:zhangshenxing@hfut.edu.cn)

课件地址: <https://zhangshenxing.github.io>

- 课时:
  - 10 周 40 课时;
  - 2024-09-09 ~ 2024-11-14
- 课程 QQ 群 (入群答案 1400261B)
  - 008 班 (生医、通信工程) **973042840**
  - 009 班 (车辆创新实验、集成) **973041550**
- 教材: 西交大高数教研室《复变函数》, 张元林《积分变换》



## 作业 15 分

作业每次会提前发布, 每两周交一次. **作业不允许迟交**. 没带的请当天联系助教补交, 迟一天交  $-50\%$  当次作业分, 迟两天或以上 0 分. 请假需提前交给我请假条.

## 期末考试 50 分

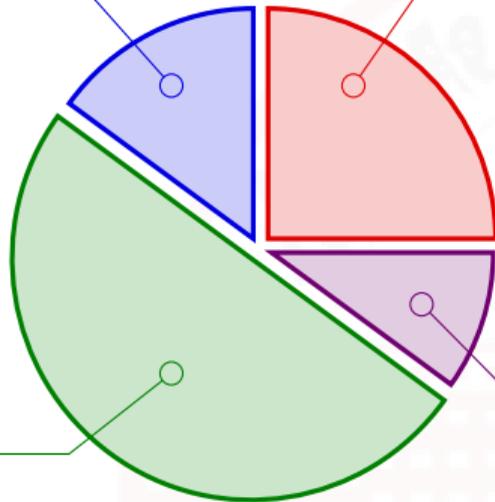
期末卷面需要达到 45 分才计算总评分数, 45 分以下直接不及格.

## 课堂测验 25 分

课堂测验共 3 次, 取最高的两次平均. 测验范围和时间会提前通知. **测验时在教室内作答, 否则按未考处理.**

## 期末报告 10 分

期末之前会告知主题. 请交手写纸质版, 并自行留存电子版本以免意外丢失.

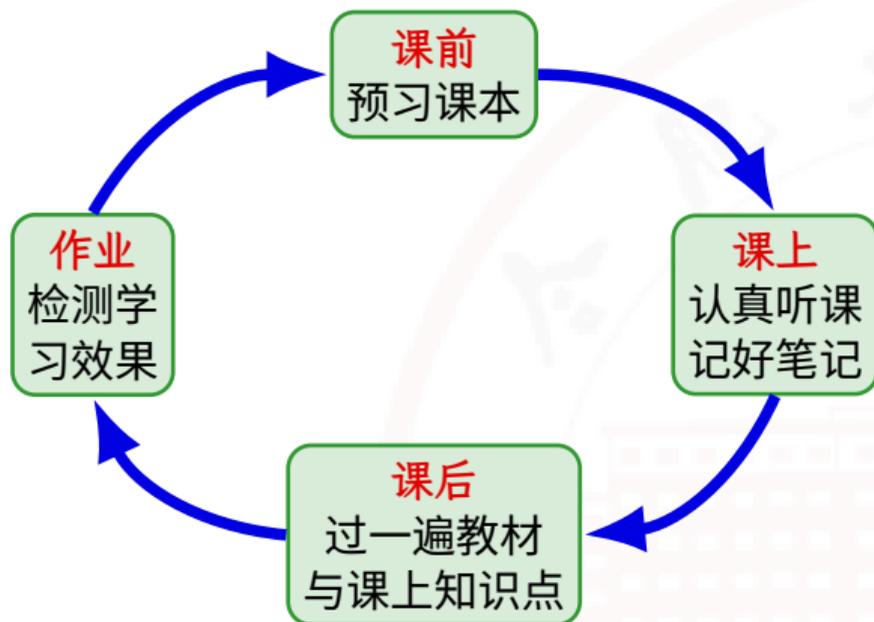


复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- **数学**中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- **物理学**中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- **信息学、电子学、电气工程**……

可以说复变函数应用之广, 在大学数学课程中仅次于高等数学和线性代数.





## 第一章 复数与复变函数

- ① 复数及其代数运算
- ② 复数的三角与指数形式
- ③ 复数的乘除、乘幂与方根
- ④ 曲线和区域
- ⑤ 复变函数
- ⑥ 极限和连续性

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程  $x^2 + bx + c = 0$ , 配方可得

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当  $\Delta > 0$  时, 有两个不同的实根;
- (2) 当  $\Delta = 0$  时, 有一个二重的实根;
- (3) 当  $\Delta < 0$  时, 无实根.

可以看出, 在一元二次方程中, 我们可以舍去包含**负数开方**的解. 然而在一元三次方程中, 即便只考虑实数根也会不可避免地引入负数开方.

例

解方程  $x^3 + 6x - 20 = 0$ .

解

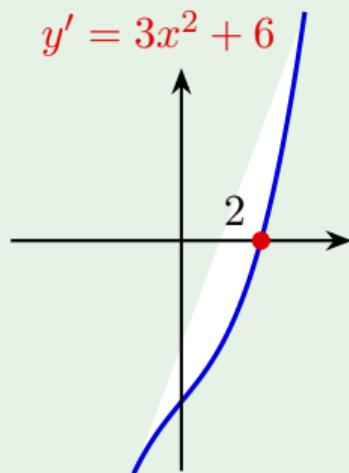
设  $x = u + v$ , 则

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + 6(u + v) - 20 = 0.$$

我们希望  $u^3 + v^3 = 20, uv = -2$ , 则  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2 - 20X - 8 = 0$ . 解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3.$$

所以  $u = 1 \pm \sqrt{3}, v = 1 \mp \sqrt{3}, x = u + v = 2$ .



例

解方程  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

解

同样地我们有  $x = u + v$ , 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$ . 然而这个方程没有实数解. 我们可以强行解得

$$u^3 = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}, \quad u = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地

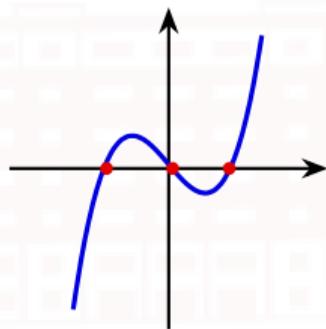
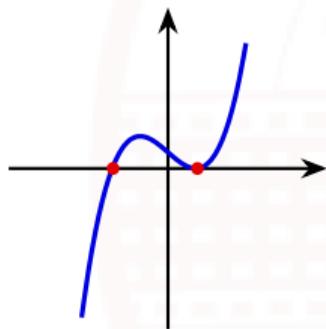
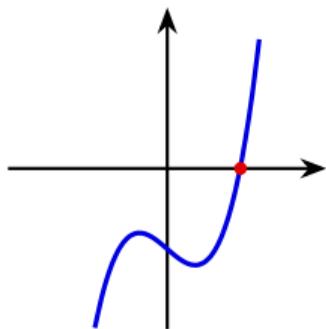
$$v = \frac{3 - 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 - \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 + 5\sqrt{-3}}{6}, \quad x = u + v = 2, -3, 1.$$

对于一般的三次方程  $x^3 + px + q = 0$  而言, 类似可得:

$$x = u - \frac{p}{3u}, \quad u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

由于  $p = 0$  情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

- (1) 当  $\Delta > 0$  时, 有 1 个实根.
- (2) 当  $\Delta = 0$  时, 有 2 个实根  $x = -\sqrt[3]{4q}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$  (2 重).
- (3) 当  $\Delta < 0$  时, 有 3 个实根.



所以我们想要使用求根公式的话, 就**必须接受负数开方**. 那么为什么当  $\Delta < 0$  时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 在学习了第一章的内容之后我们就可以回答这个问题了.

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的  $-1$  的平方根。

莱布尼兹 (Leibniz)

我们将在下一节使用更为现代的语言来解释和运用复数.

## 第一节 复数及其代数运算

- 复数的概念
- 复数的代数运算
- 共轭复数

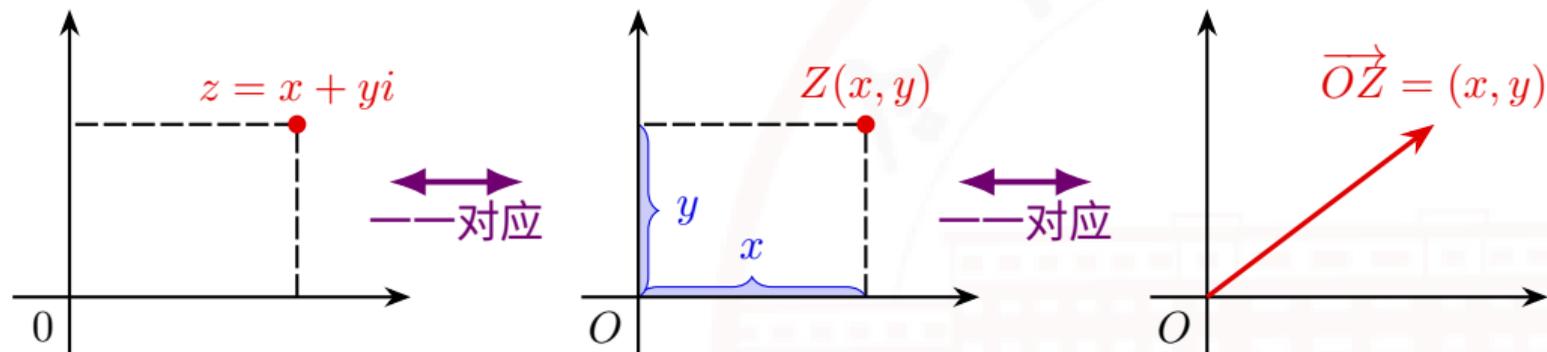
现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号  $\sqrt{-1}$  带来的歧义, 我们先引入抽象符号  $i$ , 再通过定义它的运算来构造复数.

### 定义

固定一个记号  $i$ , **复数**就是形如  $z = x + yi$  的元素, 其中  $x, y$  均是实数, 且不同的  $(x, y)$  对应不同的复数.

实数  $x$  可以自然地看成复数  $x + 0i$ .

将全体复数记作  $\mathbb{C}$ . 那么  $\mathbb{C}$  自然构成一个二维实线性空间, 且  $\{1, i\}$  是一组基. 因此它和平面上的点可以建立一一对应, 并将建立起这种对应的平面称为复平面.





## 例题：判断实数和纯虚数

### 例

实数  $x$  取何值时,  $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$  是:

- (1) 实数;
- (2) 纯虚数.

### 解

- (1)  $\text{Im } z = x^2 - 5x - 6 = 0$ , 即  $x = -1$  或  $6$ .
- (2)  $\text{Re } z = x^2 - 3x - 4 = 0$ , 即  $x = -1$  或  $4$ . 但同时要求  $\text{Im } z = x^2 - 5x - 6 \neq 0$ , 因此  $x \neq -1$ . 故  $x = 4$ .

### 练习

若  $x^2(1+i) + x(5+4i) + 4+3i$  是纯虚数, 则实数  $x = \underline{-4}$ .









复数全体构成一个域. 所谓的域, 是指带有如下内容和性质的集合

- 包含  $0, 1$ , 且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意  $a$ ,  $a + 0 = a \times 1 = a$ .

有理数全体  $\mathbb{Q}$ , 实数全体  $\mathbb{R}$  也构成域, 它们是  $\mathbb{C}$  的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域: 对于任何次数  $n \geq 1$  的复系数多项式

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1z + c_0,$$

都存在复数  $z_0$  使得  $p(z_0) = 0$ . 由此不难知道, 复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘积. 我们会在第五章证明该结论.











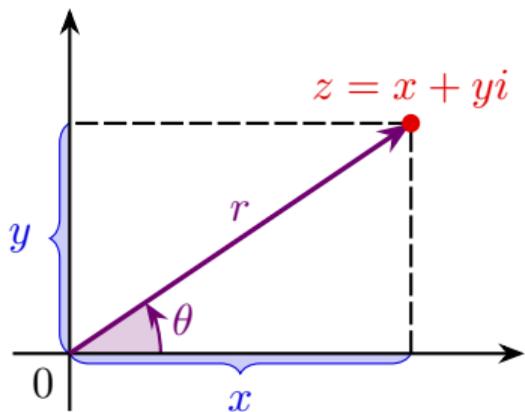


## 第二节 复数的三角与指数形式

- 复数的模和辐角
- 复数的三角形式和指数形式

## 复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \text{ 或 } \arctan \frac{y}{x} \pm \pi.$$

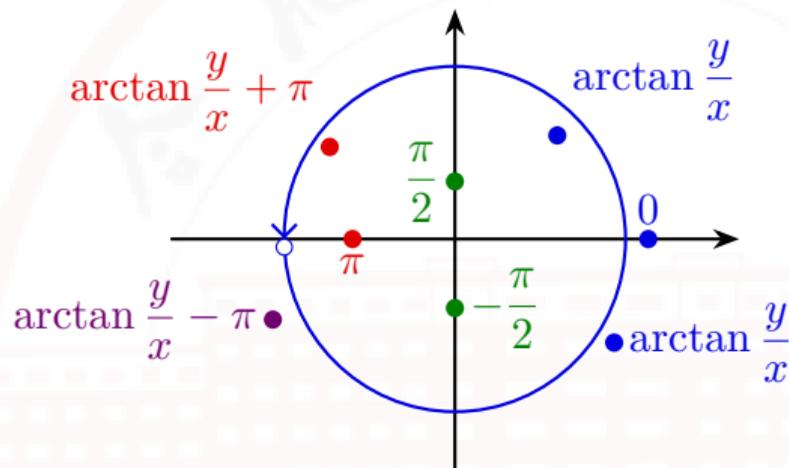
### 定义

- 称  $r$  为  $z$  的模, 记为  $|z| = r$ .
- 称  $\theta$  为  $z$  的辐角, 记为  $\text{Arg } z = \theta$ . 约定  $0$  的辐角没有定义.

# 辐角主值

任意  $z \neq 0$  的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于  $(-\pi, \pi]$  的那个, 并称之为**辐角主值**或**辐角主值**, 记作  $\arg z$ . 那么  $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

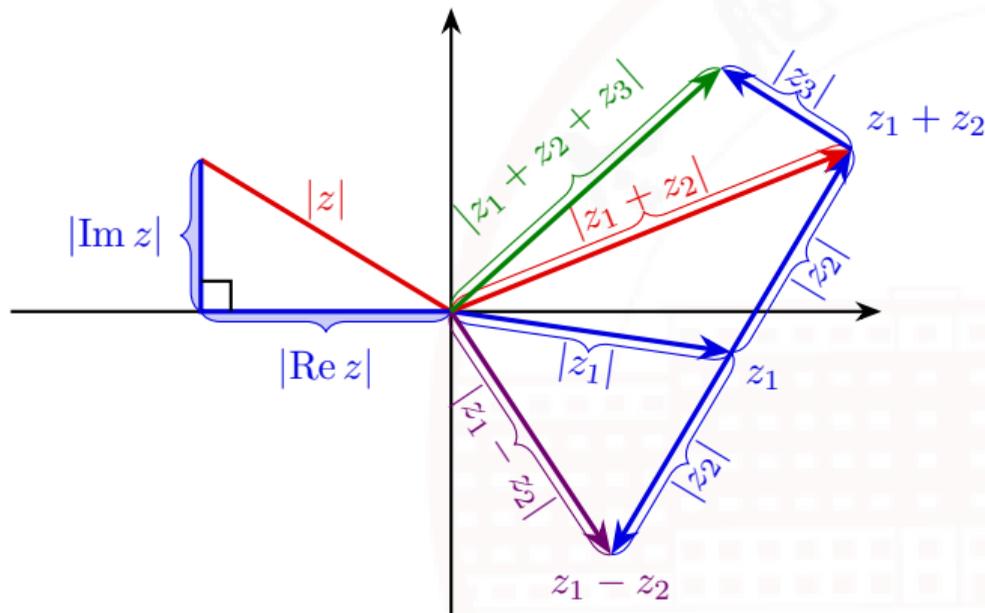


**注意**  $\arg \bar{z} = -\arg z$  **未必成立**, 仅当  $z$  不是负实数和 0 时成立.

# 复数模的性质

复数的模满足如下性质:

- $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$ ;
- $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ ;
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ;
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$ .



## 例题：共轭复数解决模的等式

例

证明

$$(1) |z_1 z_2| = |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

$$(2) |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2).$$

证明

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ . 因此  $|z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |\bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

(2) 因为

$$\text{左边} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2,$$

$$\text{右边} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2},$$

而  $\overline{z_1 \bar{z}_2} = \bar{z}_1 z_2$ , 所以两侧相等. □

由  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  可得

定义 (复数的三角形式)

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

定义  $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos \theta + i \sin \theta$  (欧拉恒等式), 则我们得到

定义 (复数的指数形式)

$$z = r e^{i\theta} = r \exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.

求复数的三角和指数形式的**关键在于计算模和辐角**.

## 例：求复数的三角和指数形式

**例**

将  $z = -\sqrt{12} - 2i$  化成三角形式和指数形式.

**解**

$r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4$ . 由于  $z$  在第三象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{-2}{-\sqrt{12}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z = 4 \left[ \cos \left( -\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{6} \right) \right] = 4e^{-\frac{5\pi i}{6}}.$$



## 例：求复数的三角和指数形式

求复数的三角或指数形式时，我们只需要任取一个辐角就可以了，不要求必须是辐角主值。

### 练习

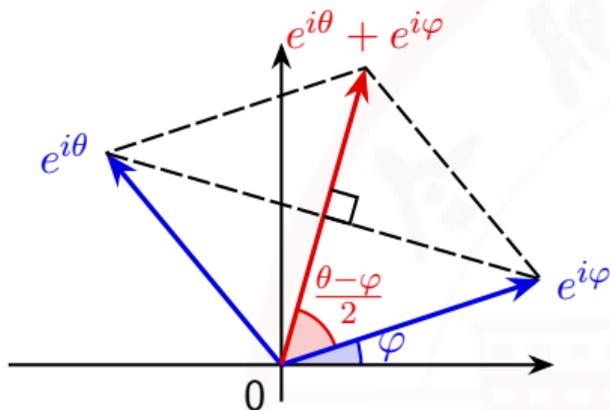
将  $z = \sqrt{3} - 3i$  化成三角形式和指数形式。

### 答案

$$z = 2\sqrt{3} \left( \cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right) = 2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi i}{3}}, \text{ 写成 } \frac{5\pi}{3} \text{ 也可以.}$$

两个模相等的复数之和的三角和指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2 \cos \frac{\theta - \varphi}{2} e^{\frac{\theta + \varphi}{2} i}.$$



例

如果  $|z| = 1, \arg z = \theta$ , 则  $z + 1 = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{\theta}{2} i}$ .

### 第三节 复数的乘除、乘幂与方根

- 复数的乘除与三角、指数表示
- 复数的乘幂
- 复数的方根

三角和指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

## 定理

设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

多值函数相等是指两边所能取到的值构成的集合相等.

注意上述等式中  $\operatorname{Arg}$  不能换成  $\operatorname{arg}$ , 也就是说

$$\operatorname{arg}(z_1 z_2) = \operatorname{arg} z_1 + \operatorname{arg} z_2, \quad \operatorname{arg} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{arg} z_1 - \operatorname{arg} z_2$$

**不一定成立.** 这是因为  $\operatorname{arg} z_1 \pm \operatorname{arg} z_2$  有可能不落在区间  $(-\pi, \pi]$  上. 事实上, 当且仅当等式右侧落在区间  $(-\pi, \pi]$  内时才成立, 否则等式两侧会相差  $\pm 2\pi$ .



从该定理可以看出, 乘以复数  $z = re^{i\theta}$  可以理解为模放大为  $r$  倍, 并沿逆时针旋转角度  $\theta$ .





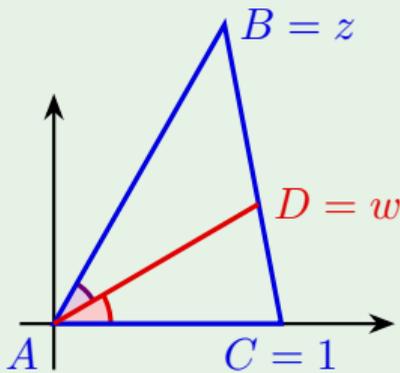
## 例：复数解决平面几何问题

例

设  $AD$  是  $\triangle ABC$  的角平分线, 证明  $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ .

证明

不妨设  $A = 0, B = z, C = 1, D = w$ , 设  $\lambda = \frac{DC}{BC} = \frac{w-1}{z-1} \in (0, 1)$ .











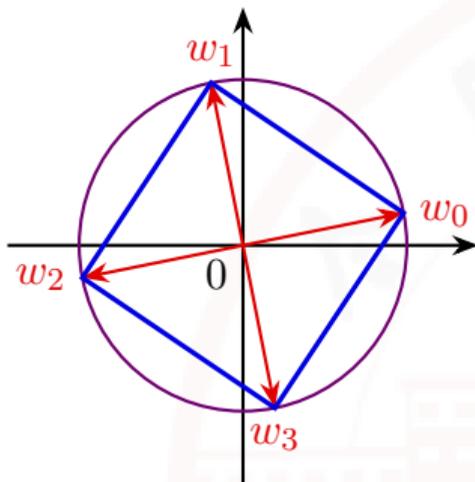






## 典型例题: 复数方根的计算

显然  $w_{k+1} = iw_k$ , 所以  $w_0, w_1, w_2, w_3$  形成了一个正方形.



### 练习

计算  $\sqrt[6]{-1} = \underline{\pm \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \pm i, \pm \frac{\sqrt{3} - i}{2}}$ .





## 第四节 曲线和区域

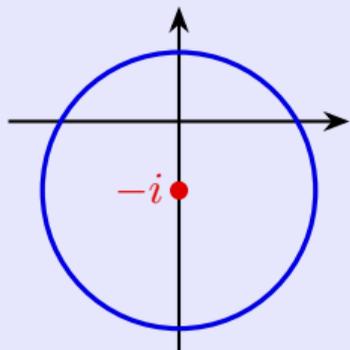
- 复数表平面曲线
- 区域的定义
- 区域的特性

## 例：复数方程表平面图形

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示，这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

**例**

$|z + i| = 2$ . 该方程表示与  $-i$  的距离为 2 的点全体，即圆心为  $-i$  半径为 2 的圆. 一般的圆方程为  $|z - z_0| = R$ , 其中  $z_0$  是圆心,  $R$  是半径.

































## 第五节 复变函数

- 复变函数的定义
- 映照

所谓的**映射**, 就是两个集合之间的一种对应  $f: A \rightarrow B$ , 使得对于每一个  $a \in A$ , 有一个唯一确定的  $b = f(a)$  与之对应.

- 当  $A$  和  $B$  都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- 当  $A$  和  $B$  都是复数集合的子集时, 它就是一个**复变函数**.

### 例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n$  ( $n$  为整数),  $\frac{z+1}{z^2+1}$  都是复变函数.

### 定义

- 称  $A$  为函数  $f$  的**定义域**.
- 称  $\{w = f(z) \mid z \in A\}$  为它的**值域**.

上述函数的定义域和值域分别是什么?

在复变函数理论中, 我们常常会遇到**多值的复变函数**, 也就是说一个  $z \in A$  可能有多个  $w$  与之对应. 例如  $\text{Arg } z, \sqrt[n]{z}$  等. 为了方便研究, 我们常常需要对每一个  $z$ , 选取固定的一个  $f(z)$  的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个**单值分支**.

**例**

$\arg z$  是无穷多值函数  $\text{Arg } z$  的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数. 如果  $f$  和  $f^{-1}$  都是单值的, 则称  $f$  是**一一对应**.

**例**

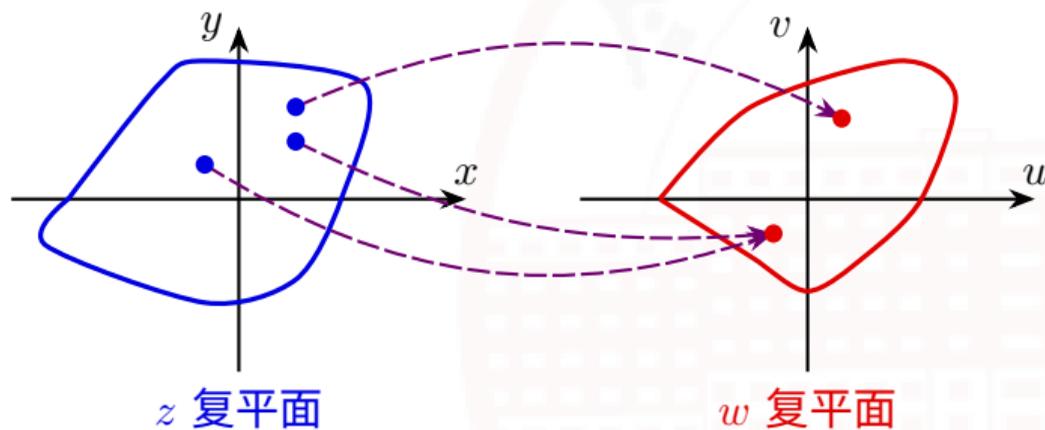
$f(z) = z^n$  的反函数就是  $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$ . 当  $n = \pm 1$  时,  $f$  是一一对应.

若无特别声明, 本课程中**复变函数总是指单值的复变函数**.

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 ( $z$  复平面和  $w$  复平面) 之间的**映照**来表示这种对应关系, 其中

$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$$

的实部和虚部是两个二元实变函数.















## 第六节 极限和连续性

- 无穷远点
- 数列的极限
- 函数的极限
- 函数的连续性

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限. 我们先来看数列极限的定义.

## 定义

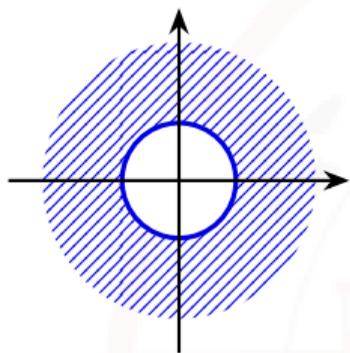
设  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  是一个复数列. 如果  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$  使得当  $n \geq N$  时  $|z_n - z| < \varepsilon$ , 则称  $z$  是数列  $\{z_n\}$  的极限, 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ .

如果  $\forall X > 0, \exists N$  使得当  $n \geq N$  时  $|z_n| > X$ , 则记  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ .

如果我们称

$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > X\}$$

为  $\infty$  的 (去心) 邻域,



那么上述定义可统一表述为:

### 数列极限的等价定义

对  $z$  的任意邻域  $U$ ,  $\exists N$  使得当  $n \geq N$  时  $z_n \in U$ .











由此可知极限的四则运算法则对于数列也是成立的.

## 定理

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$ , 则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = zw;$$

$$(3) \text{ 当 } w \neq 0 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w}.$$



















## 第二章 解析函数

- ① 解析函数的概念
- ② 函数解析的充要条件
- ③ 初等函数

## 第一节 解析函数的概念

- 可导的函数
- 可微的函数
- 解析的函数

由于  $\mathbb{C}$  和  $\mathbb{R}$  一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

### 定义

设  $w = f(z)$  的定义域是区域  $D$ ,  $z_0 \in D$ . 如果极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  可导. 这个极限值称为  $f(z)$  在  $z_0$  的导数, 记作

$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

如果  $f(z)$  在区域  $D$  内处处可导, 称  $f(z)$  在  $D$  内可导.

## 例：线性函数的不可导性

例

函数  $f(z) = x + 2yi$  在哪些点处可导？

解

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}. \end{aligned}$$

当  $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$  时, 上式  $\rightarrow 2$ ; 当  $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$  时, 上式  $\rightarrow 1$ . 因此该极限不存在,  $f(z)$  处处不可导.

## 例: 复变函数的导数

### 练习

函数  $f(z) = x - yi$  在哪些点处可导?

### 答案

处处不可导.

### 例

求  $f(z) = z^2$  的导数.

### 解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$



## 定理

若  $f(z)$  在  $z_0$  可导, 则  $f(z)$  在  $z_0$  连续.

该定理的证明和实变量情形完全相同.

## 证明

设

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z = f'(z_0) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

□

复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

### 定义

如果存在常数  $A$  使得函数  $w = f(z)$  满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

其中  $o(\Delta z)$  表示  $\Delta z$  的高阶无穷小量, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  处可微, 称  $A\Delta z$  为  $f(z)$  在  $z_0$  的微分, 记作  $dw = A\Delta z$ .

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且

$$dw = f'(z_0)\Delta z, \quad dz = \Delta z. \quad \text{故} \quad dw = f'(z_0) dz, \quad f'(z_0) = \frac{dw}{dz}.$$



## 练习

函数  $f(z)$  在点  $z_0$  处解析是  $f(z)$  在该点可导的( A ).

(A) 充分条件

(B) 必要条件

(C) 充要条件

(D) 既非充分也非必要条件

## 答案

解析要求在  $z_0$  的一个邻域内都可导才行.

例

研究函数  $f(z) = |z|^2$  的解析性.

解

由于

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\Delta x - \Delta yi}{\Delta x + \Delta yi},$$

- (1) 若  $z = 0$ , 则当  $\Delta z \rightarrow 0$  时该极限为 0.
- (2) 若  $z \neq 0$ , 则当  $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$  时该极限为  $\bar{z} + z$ ; 当  $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$  时该极限为  $\bar{z} - z$ . 因此此时极限不存在.

故  $f(z)$  仅在  $z = 0$  处可导, 从而处处不解析.

## 第二节 函数解析的充要条件

- 柯西-黎曼方程
- 柯西-黎曼方程的应用

通过对一些简单函数的分析, 我们会发现可导的函数往往可以直接表达为  $z$  的函数的形式, 而不解析的往往包含  $x, y, \bar{z}$  等内容. 这种现象并不是孤立的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

为了简便我们用  $u_x, u_y, v_x, v_y$  等记号表示偏导数.

设  $f$  在  $z$  处可导,  $f'(z) = a + bi$ , 则

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta z).$$

由于  $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$ , 因此  $u, v$  可微且  $u_x = v_y = a, v_x = -u_y = b$ .

反过来, 假设  $u, v$  可微且  $u_x = v_y, v_x = -u_y$ . 由全微分公式

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\Delta z) = u_x \Delta x - v_x \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(\Delta z) = v_x \Delta x + u_x \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta f = \Delta(u + iv) = (u_x + iv_x) \Delta x + (-v_x + iu_x) \Delta y + o(\Delta z)$$

$$= (u_x + iv_x) \Delta(x + iy) + o(\Delta z)$$

$$= (u_x + iv_x) \Delta z + o(\Delta z).$$

故  $f(z)$  在  $z$  处可导, 且  $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ .

由此得到

## 柯西-黎曼定理

$f(z)$  在  $z$  可导当且仅当在  $z$  点  $u, v$  可微且满足柯西-黎曼方程 (简称为 C-R 方程):

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$



注意到  $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}$ ,  $y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$ . 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 我们定义  $f$  对  $z$  和  $\bar{z}$  的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

如果把  $z, \bar{z}$  看成独立变量, 那么当  $f$  在  $z$  处可导时,  $df = f' dz$ . 当  $f$  关于  $z, \bar{z}$  可微时 (即  $u, v$  可微),

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

所以  $f$  在  $z$  处可导当且仅当  $u, v$  可微且  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ , 此时  $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$ .

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

### 定理

- 如果  $u_x, u_y, v_x, v_y$  在  $z$  处连续, 且满足 C-R 方程, 则  $f(z)$  在  $z$  可导.
- 如果  $u_x, u_y, v_x, v_y$  在区域  $D$  上处处连续, 且满足 C-R 方程, 则  $f(z)$  在  $D$  上可导 (从而解析).

**例**

函数  $f(z) = \bar{z}$  在何处可导, 在何处解析?

**解**

由  $u = x, v = -y$  可知

$$u_x = 1,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = 0,$$

$$v_y = -1.$$

因为  $u_x = 1 \neq v_y = -1$ , 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

也可由  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$  看出.

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例

函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

解

由  $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$  可知

$$u_x = 2x,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = y,$$

$$v_y = x.$$

由  $2x = x, 0 = -y$  可知只有  $x = y = 0, z = 0$  满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且

$$f'(0) = u_x(0) + iv_x(0) = 0.$$

也可由  $f = \frac{1}{2}z(z + \bar{z}), \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}z$  看出,  $f'(0) = \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z=0} = z \Big|_{z=0} = 0.$

## 例

函数  $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$  在何处可导, 在何处解析?

## 解

由  $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$  可知

$$u_x = e^x \cos y,$$

$$u_y = -e^x \sin y,$$

$$v_x = e^x \sin y,$$

$$v_y = e^x \cos y.$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y) = f(z).$$

实际上, 这个函数就是复变量的指数函数  $e^z$ .

### 练习

函数( A )在  $z = 0$  处不可导.

(A)  $2x + 3yi$

(B)  $2x^2 + 3y^2i$

(C)  $e^x \cos y + ie^x \sin y$

(D)  $x^2 - xyi$

### 答案

根据 C-R 方程可知对于 A,  $u_x(0) = 2 \neq v_y(0) = 3$ . 对于 BD, 各个偏导数在 0 处取值都是 0. C 则是处处都可导.

## 例: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例

设函数  $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$  在复平面内处处解析. 求实常数  $a, b, c, d$  以及  $f'(z)$ .

解

由于

$$\begin{aligned}u_x &= 2x + ay, & u_y &= ax + 2by, \\v_x &= 2cx + dy, & v_y &= dx + 2y,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}2x + ay &= dx + 2y, & ax + 2by &= -(2cx + dy), \\a &= d = 2, & b &= c = -1, \\f'(z) &= u_x + iv_x = 2x + 2y + i(-2x + 2y) = (2 - 2i)z.\end{aligned}$$

### 例

如果  $f'(z)$  在区域  $D$  内处处为零, 则  $f(z)$  在  $D$  内是一常数.

### 证明

由于  $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0$ , 因此  $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$ ,  $u, v$  均为常数, 从而  $f(z) = u + iv$  是常数.  $\square$

类似地可以证明, 若  $f(z)$  在  $D$  内解析, 则下述条件均可推出  $f(z)$  是常数:

- $f'(z) = 0$ ,
- $|f(z)|$  是一常数,
- $\arg f(z)$  是一常数,
- $\operatorname{Re} f(z)$  是一常数,
- $\operatorname{Im} f(z)$  是一常数,
- $v = u^2$ .



最后我们来看复数在求导中的一个应用.

**例**

设  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ , 则它在除  $z = \pm i$  外处处解析. 当  $z = x$  为实数时,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} &= f^{(n)}(x) = \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right]^{(n)} \\ &= \frac{i}{2} \cdot (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}} \right] \\ &= (-1)^{n+1} n! \operatorname{Im} \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n! \sin[(n+1) \operatorname{arccot} x]}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

任意有理函数的高阶导数均可按此法计算.

### 第三节 初等函数

- 指数函数
- 对数函数
- 幂函数
- 三角函数和反三角函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

(1)  $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$  (欧拉恒等式);

(2)  $\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$  (极限定义);

(3)  $\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$  (级数定义);

(4)  $\exp z$  是唯一的一个处处解析的函数, 使得当  $z = x \in \mathbb{R}$  时,  $\exp z = e^x$  ( $e^x$  的解析延拓).

有些人会从  $e^x, \cos x, \sin x$  的泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

形式地代入得到欧拉恒等式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明. 我们将在第四章说明(1)、(3)和(4)是等价的.

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \text{ 型不定式}) \\ &= \exp \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left( \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x. \end{aligned}$$

不妨设  $n > |z|$ , 这样  $1 + \frac{z}{n}$  落在右半平面,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \arg \left( 1 + \frac{z}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \arctan \frac{y}{n+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ny}{n+x} = y.$$

故  $\exp z = e^x (\cos y + i \sin y)$ .

## 指数函数

$$\exp z := e^x(\cos y + i \sin y).$$

为了方便, 我们也记  $e^z = \exp z$ . 指数函数有如下性质:

- $\exp z$  处处解析, 且  $(\exp z)' = \exp z$ .
- $\exp z \neq 0$ .
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$ .
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$ , 即  $\exp z$  周期为  $2\pi i$ .
- $\exp z_1 = \exp z_2$  当且仅当  $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ .
- 指数函数将直线族  $\operatorname{Re} z = c$  映为圆周族  $|w| = e^c$ , 将直线族  $\operatorname{Im} z = c$  映为射线族  $\operatorname{Arg} w = c$ .

## 例

计算函数  $f(z) = \exp(z/6)$  的周期.

## 解

设  $f(z_1) = f(z_2)$ , 则  $e^{z_1/6} = e^{z_2/6}$ . 因此存在  $k \in \mathbb{Z}$  使得

$$\frac{z_1}{6} = \frac{z_2}{6} + 2k\pi i,$$

从而  $z_1 - z_2 = 12k\pi i$ . 所以  $f(z)$  的周期是  $12\pi i$ .

一般地,  $\exp(az + b)$  的周期是  $\frac{2\pi i}{a}$  (或写成  $-\frac{2\pi i}{a}$ ),  $a \neq 0$ .

对数函数  $\text{Ln } z$  定义为指数函数  $\exp z$  的反函数. 为什么我们用大写的  $\text{Ln}$  呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如  $\text{Arg } z$  和  $\arg z$ .



例

求  $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$  以及它们的主值.

解

(1)

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

主值为  $\ln 2$ .

(2)

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \operatorname{Arg}(-1) = (2k + 1)\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

主值为  $\pi i$ .









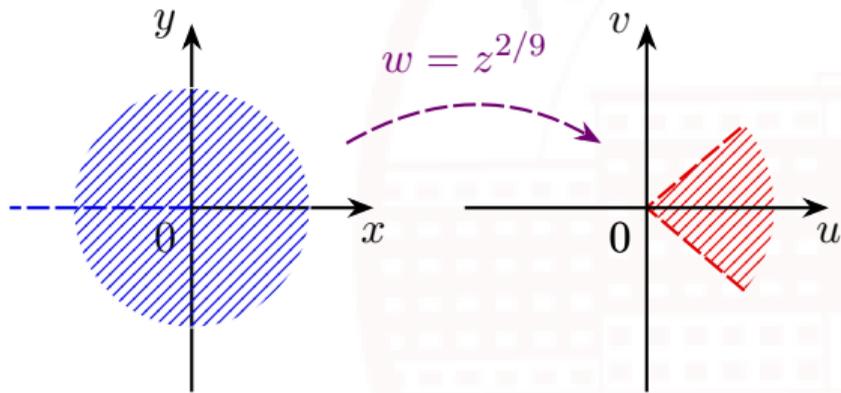


## 幂函数的性质: $a$ 为分数时

当  $a = \frac{p}{q}$  为分数,  $p, q$  为互质的整数且  $q > 1$  时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp \left[ \frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q} \right], \quad k = 0, 1, \dots, q-1$$

具有  $q$  个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值  $w = \exp(a \ln z)$  是处处解析的. 事实上它就是  $\sqrt[q]{z^p} = (\sqrt[q]{z})^p$ .



## 幂函数的性质: $a$ 为其他情形

对于其它的  $a$ ,  $z^a$  具有无穷多个值. 这是因为此时当  $k \neq 0$  时,  $2k\pi ai$  不可能是  $2\pi i$  的整数倍. 从而不同的  $k$  得到的是不同的值. 去掉负实轴和  $0$  之后, 它的主值  $w = \exp(a \ln z)$  也是处处解析的.

$a$	$z^a$ 的值	$z^a$ 的解析区域
整数 $n$	单值	$n \geq 0$ 时处处解析 $n < 0$ 时除零点外解析
分数 $p/q$	$q$ 值	除负实轴和零点外解析
无理数或虚数	无穷多值	除负实轴和零点外解析

**例**求  $1^{\sqrt{2}}$  和  $i^i$ .**解**

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = \exp \left[ i \cdot \left( 2k + \frac{1}{2} \right) \pi i \right] = \exp \left( -2k\pi - \frac{1}{2}\pi \right), k \in \mathbb{Z}.$$

**练习**填空题:  $3^i$  的辐角主值是 ln 3.



我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数  $x$  成立, 我们将其推广到复数情形.

### 定义

定义余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

那么欧拉恒等式  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  对任意复数  $z$  均成立.

## 三角函数的性质

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \sin(iy) = i \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

当  $y \rightarrow \infty$  时,  $\cos(iy)$  和  $\sin(iy)$  都  $\rightarrow \infty$ . 因此  $\sin z$  和  $\cos z$  并不有界. 这和实变情形完全不同.

容易看出  $\cos z$  和  $\sin z$  的零点都是实数. 于是我们可类似定义其它三角函数

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, & \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}, z \neq k\pi, \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, & \csc z &= \frac{1}{\sin z}, z \neq k\pi. \end{aligned}$$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi i.$$

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

$\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$  的周期是  $2\pi i$ ,  $\operatorname{th} z$  的周期是  $\pi i$ .

设  $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$ , 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值).}$$

因此反余弦函数为

$$w = \text{Arccos } z = -i \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

- 反正弦函数  $\text{Arcsin } z = -i \text{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2});$
- 反正切函数  $\text{Arctan } z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, z \neq \pm i;$
- 反双曲余弦函数  $\text{Arch } z = \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$
- 反双曲正弦函数  $\text{Arsh } z = \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1});$
- 反双曲正切函数  $\text{Arth } z = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}, z \neq \pm 1.$



## 另解

由  $\sin z = 2$  可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm\sqrt{3}i.$$

于是  $e^{iz} = \cos z + i \sin z = (2 \pm \sqrt{3})i$ ,

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

我们总有形式

$$\operatorname{Arcsin} z = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm \theta,$$

$$\operatorname{Arccos} z = 2k\pi \pm \theta,$$

$$\operatorname{Arctan} z = k\pi + \theta.$$

### 第三章 复变函数的积分

- ① 复变函数积分的概念
- ② 柯西-古萨基本定理和复合闭路定理
- ③ 原函数和不定积分
- ④ 柯西积分公式
- ⑤ 解析函数与调和函数的关系

## 第一节 复变函数积分的概念

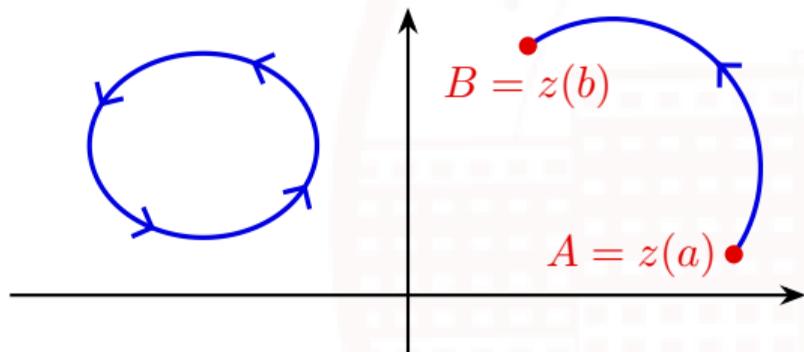
- 复变函数积分的定义
- 复变函数积分的计算法

## 有向曲线

设  $C$  是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程  $z = z(t), a \leq t \leq b$  除去有限个点之外都有非零导数. 这里  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ .

固定它的一个方向, 称为**正方向**, 则我们得到一条**有向曲线**. 和这条曲线方向相反的记作  $C^-$ , 它的方向被称为该曲线**负方向**.

对于闭路, 它的**正方向总是指逆时针方向**, 负方向总是指顺时针方向. 以后我们不加说明的话**默认是正方向**.



所谓的复变函数积分, 本质上仍然是第二类曲线积分. 设复变函数

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

定义在区域  $D$  内, 有向曲线  $C$  包含在  $D$  中. 形式地展开

$$f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy) = (u dx - v dy) + i(u dy + v dx).$$

### 定义

如果下述右侧两个线积分均存在, 则定义

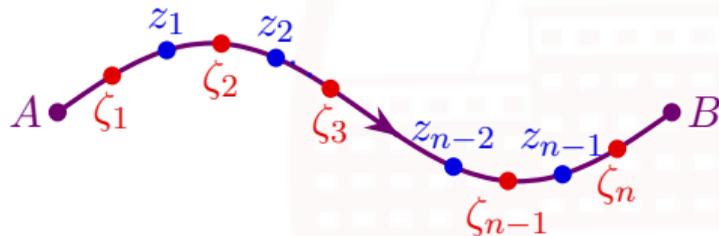
$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

为  $f(z)$  沿曲线  $C$  的积分.

当然, 我们也可以像线积分那样通过分割来定义. 在曲线  $C$  上依次选择分点  $z_0 = A, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = B$ . 然后在每一段弧上任取  $\zeta_k \in \widehat{z_{k-1}z_k}$  并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

然后称  $n \rightarrow \infty$ , 分割的最大弧长  $\rightarrow 0$  时  $S_n$  的极限为复变函数积分. 这二者是等价的.



如果  $C$  是闭路, 则该积分记为  $\oint_C f(z) dz$ . 此时该积分不依赖端点的选取.

如果  $C$  是实轴上的区间  $[a, b]$  且  $f(z) = u(x)$ , 则

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b u(x) dx$$

就是黎曼积分.

根据线积分的存在性条件可知:

### 定理

如果  $f(z)$  在  $D$  内连续,  $C$  是光滑曲线, 则  $\int_C f(z) dz$  总存在.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C: z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为  $t$  增加的方向, 则  $dz = z'(t) dt = (x'(t) + iy'(t)) dt$ .

## 复变函数积分计算方法 I

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

如果  $C$  的正方向是从  $z(b)$  到  $z(a)$ , 则需要交换右侧积分的上下限.

如果  $C$  是逐段光滑的, 则相应的积分就是各段的积分之和. 以后我们只考虑逐段光滑曲线上的连续函数的积分.

## 典型例题: 计算复变函数沿曲线的积分

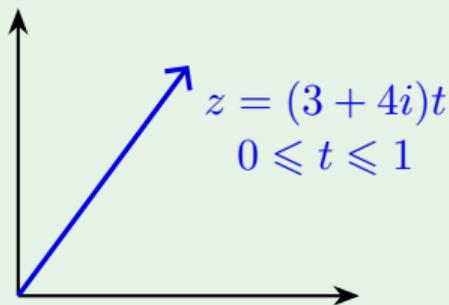
例

求  $\int_C z dz$ , 其中  $C$  是从原点到点  $3 + 4i$  的直线段.

解

由于  $z = (3 + 4i)t, 0 \leq t \leq 1$ , 因此

$$\int_C z dz = \int_0^1 (3 + 4i)t \cdot (3 + 4i) dt = (3 + 4i)^2 \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}(3 + 4i)^2 = -\frac{7}{2} + 12i.$$



## 典型例题: 计算复变函数沿曲线的积分

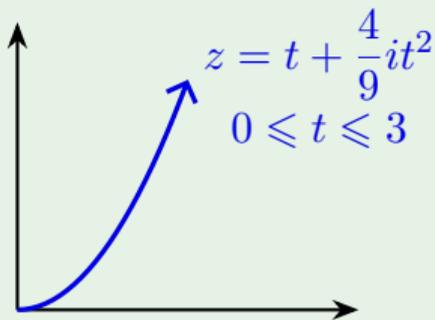
例

求  $\int_C z dz$ , 其中  $C$  是抛物线  $y = \frac{4}{9}x^2$  上从原点到点  $3 + 4i$  的曲线段。

解

由于  $z = t + \frac{4}{9}it^2, 0 \leq t \leq 3$ , 因此

$$\begin{aligned}\int_C z dz &= \int_0^3 \left(t + \frac{4}{9}it^2\right) \cdot \left(1 + \frac{8}{9}it\right) dt \\ &= \int_0^3 \left(t + \frac{4}{3}it^2 - \frac{32}{81}t^3\right) dt \\ &= \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{9}it^3 - \frac{8}{81}t^4\right) \Big|_0^3 = -\frac{7}{2} + 12i.\end{aligned}$$



## 典型例题: 计算复变函数沿曲线的积分

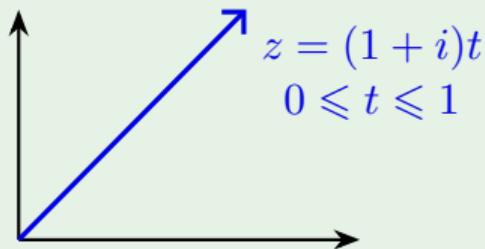
例

求  $\int_C \operatorname{Re} z dz$ , 其中  $C$  是从原点到点  $1+i$  的直线段.

解

由于  $z = (1+i)t, 0 \leq t \leq 1$ , 因此  $\operatorname{Re} z = t$ ,

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t \cdot (1+i) dt = (1+i) \int_0^1 t dt = \frac{1+i}{2}.$$







## 例: 计算复变函数沿圆周的积分

例

求  $\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ , 其中  $n$  为整数.

解

$C: |z-z_0|=r$  的参数方程为  $z = z_0 + re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ . 于是  $dz = ire^{i\theta} d\theta$ .

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} &= \int_0^{2\pi} i(r e^{i\theta})^{-n} d\theta = ir^{-n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta \\ &= ir^{-n} \int_0^{2\pi} (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) d\theta = \begin{cases} 2\pi i, & \text{若 } n = 0; \\ 0, & \text{若 } n \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

这个积分以后经常用到, 它的特点是积分值与圆周的圆心和半径都无关.

## 定理

$$(1) \int_C f(z) dz = - \int_{C^-} f(z) dz.$$

$$(2) \int_C kf(z) dz = k \int_C f(z) dz.$$

$$(3) \int_C [f(z) \pm g(z)] dz = \int_C f(z) dz \pm \int_C g(z) dz.$$

(4) (长大不等式) 设  $C$  的长度为  $L$ ,  $f(z)$  在  $C$  上满足  $|f(z)| \leq M$ , 则

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \leq ML.$$

线性性质

## 证明

我们来证明下(4). 由

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k) \Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \Delta s_k \leq M \sum_{k=1}^n \Delta s_k$$

可知

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \leq ML. \quad \square$$

长大不等式常常用于证明等式: 估算一个积分和一个具体的数值之差不超过任意给定的  $\varepsilon$ , 从而得到二者相等.

注意到: 如果被积函数  $f(z)$  在  $C$  上的点都连续, 那么  $|f(z)|$  是  $C$  的参变量  $t \in [a, b]$  的连续函数, 从而有界, 即存在  $M$  使得  $|f(z)| \leq M, \forall z \in C$ .

## 例：长大不等式的应用

例

设  $f(z)$  在  $z \neq a$  处连续, 且  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = k$ , 则

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{|z-a|=r} f(z) dz = 2\pi ik.$$

证明

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  使得当  $|z - a| < \delta$  时,  $|(z - a)f(z) - k| \leq \varepsilon$ . 当  $0 < r < \delta$  时,

$$\begin{aligned} \left| \oint_{|z-a|=r} f(z) dz - 2\pi ik \right| &= \left| \oint_{|z-a|=r} \left[ f(z) - \frac{k}{z-a} \right] dz \right| \\ &= \left| \oint_{|z-a|=r} \frac{(z-a)f(z) - k}{z-a} dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

由于  $\varepsilon$  是任意的, 因此命题得证. □

## 第二节 柯西-古萨基本定理和复合闭路定理

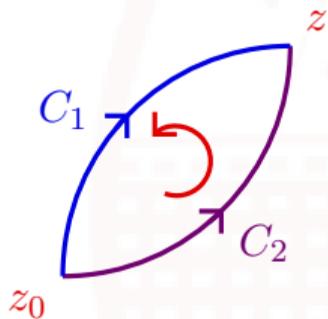
- 柯西-古萨基本定理
- 复合闭路定理

## 积分路径无关与闭路积分

观察下方的两条曲线  $C_1, C_2$ . 设  $C = C_1^- + C_2$ . 可以看出

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \iff \oint_C f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz = 0.$$

所以  $f(z)$  的积分只与起点终点有关  $\iff f(z)$  绕任意闭路的积分为零. 这里, 如果  $C$  不是闭路 (有自相交的点), 也可以拆分为一些闭路的并.



上一节中我们计算了  $f(z) = z, \operatorname{Re} z, \frac{1}{z - z_0}$  的积分. 其中

- $f(z) = z$  处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$  有奇点  $z_0$ , 沿绕  $z_0$  闭路的积分非零;
- $f(z) = \operatorname{Re} z$  处处不解析, 积分与路径有关 (闭路积分可能非零).

由此可见函数沿闭路积分为零, 与函数在闭路内部是否解析有关.

## 柯西-古萨基本定理: 推导

设  $C$  是一条闭路,  $D$  是其内部区域. 设  $f(z)$  在闭区域  $\bar{D} = D \cup C$  上解析, 即存在区域  $B \supseteq \bar{D}$  使得  $f(z)$  在  $B$  上解析.

为了简便假设  $f'(z)$  连续, 则

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy).$$

由格林公式和 C-R 方程可知

$$\oint_C f(z) dz = - \iint_D (v_x + u_y) dx dy + i \iint_D (u_x - v_y) dx dy = 0.$$

也可以从

$$\oint_C f(z) dz = - \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz d\bar{z} = 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy = 0$$

看出.

### 柯西-古萨基本定理

设  $f(z)$  在闭路  $C$  上连续,  $C$  内部解析, 则  $\oint_C f(z) dz = 0$ .

### 推论

设  $f(z)$  在单连通域  $D$  内解析,  $C$  是  $D$  内一条闭合曲线, 则  $\oint_C f(z) dz = 0$ .

这里的闭合曲线可以不是闭路.

## 典型例题: 柯西-古萨基本定理计算积分

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz.$$

解

由于  $\frac{1}{2z-3}$  在  $|z| \leq 1$  上解析, 因此由柯西-古萨基本定理  $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz = 0$ .

练习

$$(1) \oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z^2+z} dz = \underline{0}.$$

$$(2) \text{ 求 } \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{|z|} dz = \underline{0}.$$

**例**

求  $\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} dz$ , 其中  $C: |z-i| = \frac{1}{2}$ .

**解**

注意到  $\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} \right)$ . 由于  $\frac{1}{z}, \frac{1}{z+i}$  在  $|z-i| \leq \frac{1}{2}$  上解析, 因此由柯西-古萨基本定理

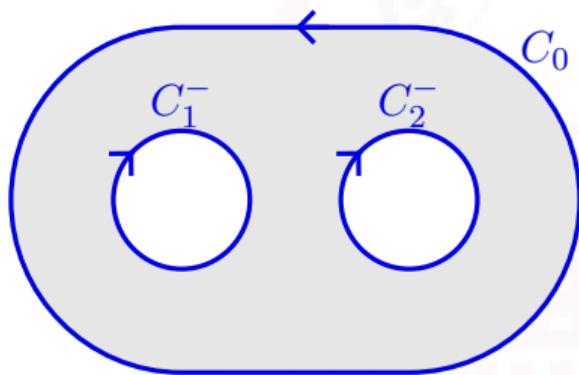
$$\oint_C \frac{1}{z} dz = \oint_C \frac{1}{z+i} dz = 0,$$

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} dz = -\frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{z-i} dz = -\pi i.$$

设  $C_0, C_1, \dots, C_n$  是  $n+1$  条简单闭曲线,  $C_1, \dots, C_n$  每一条都包含在其它闭路的外部, 而且它们都包含在  $C_0$  的内部. 这样它们围成了一个多连通区域  $D$ , 它的边界称为一个**复合闭路**

$$C = C_0 + C_1^- + \dots + C_n^-.$$

沿着  $C$  前进的点,  $D$  总在它的左侧, 所以这就是它的正方向.



## 复合闭路定理

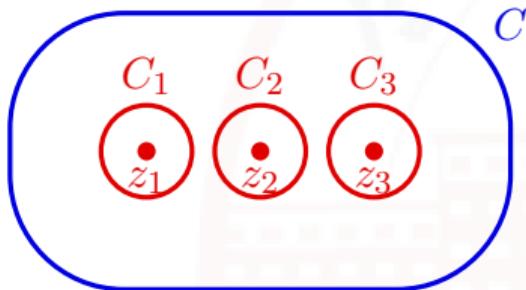
设  $f(z)$  在复合闭路  $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$  及其所围成的多连通区域内解析, 则

$$\oint_{C_0} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z) dz.$$

事实上, 复合闭路定理和柯西-古萨基本定理可以看成是一个定理的两种情形: 设  $C$  是一个闭路或复合闭路, 若  $f(z)$  在  $C$  及其围成的区域 (单连通或多连通) 内解析, 则

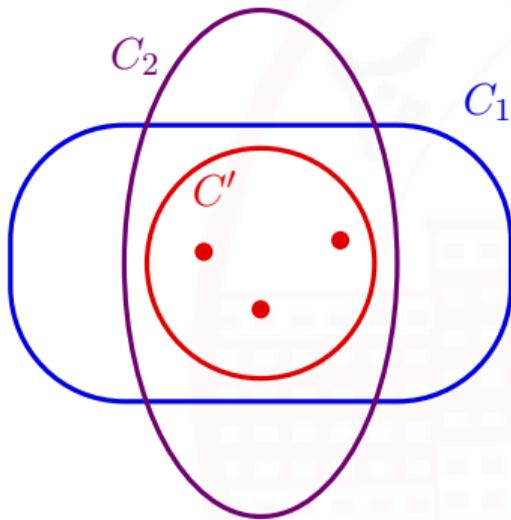
$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

在实际应用中, 如果被积函数  $f(z)$  在 (复合) 闭路  $C$  的内部有有限多个奇点  $z_1, \dots, z_k$ . 那么我们可以在  $C$  内部 (围成的区域) 构造闭路  $C_1, \dots, C_k$ , 使得每个  $C_j$  内部只包含一个奇点  $z_j$ . 这样, 内部含多个奇点的情形就可以化成内部只含一个奇点的情形. 最后将这些闭路上的积分相加即可.



## 复合闭路定理: 注记

此外, 从复合闭路定理还可以看出, 在计算积分  $\oint_C f(z) dz$  时,  $C$  的具体形状无关紧要, 只要其内部奇点不变,  $C$  可以任意变形. 因为我们总可以选择一个包含这些奇点的闭路  $C'$ , 使得  $C'$  包含在  $C$  及其变形后的闭路内部. 这样它们的积分自然都和  $C'$  上的积分相同. 这里即使  $C$  是复合闭路也是可以自由变形的.







同理, 由复合闭路定理和上一节的结论可知当  $a$  在  $C$  的内部且  $n = -1$  时积分为  $2\pi i$ .

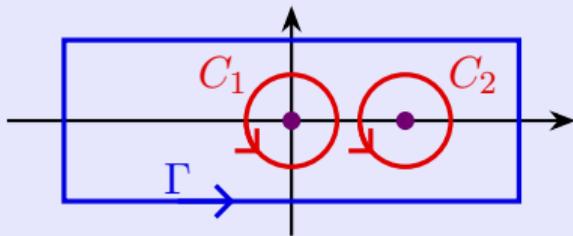
当  $a$  在  $C$  的内部时,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

## 例：复合闭路定理的应用

例

求  $\int_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$ , 其中  $\Gamma$  是由  $2 \pm i, -2 \pm i$  形成的矩形闭路。



解

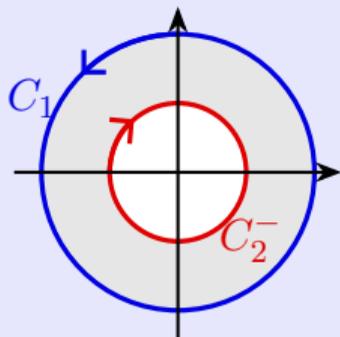
函数  $\frac{2z-1}{z^2-z}$  在  $\Gamma$  内有两个奇点  $z=0, 1$ . 设  $C_1, C_2$  如图所示, 由复合闭路定理

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz &= \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z} dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z} dz \\ &= \oint_{C_1} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z-1} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1} dz \\ &= 2\pi i + 0 + 0 + 2\pi i = 4\pi i. \end{aligned}$$

## 例：复合闭路定理的应用

例

求  $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z} dz$ , 其中  $\Gamma = C_1 + C_2^-$ ,  $C_1 : |z| = 2, C_2 : |z| = 1$ .



解

函数  $\frac{e^z}{z}$  在  $C_1, C_2$  围城的圆环域内解析. 由复合闭路定理可知  $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z} dz = 0$ .

### 第三节 原函数和不定积分

- 原函数
- 牛顿-莱布尼兹定理

设  $f(z)$  在单连通域  $D$  内解析,  $C$  是  $D$  内一条起于  $z_0$  终于  $z$  的曲线. 由柯西-古萨基本定理可知, 积分  $\int_C f(\zeta) d\zeta$  与路径无关, 只与  $z_0, z$  有关. 因此我们也将其记为

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

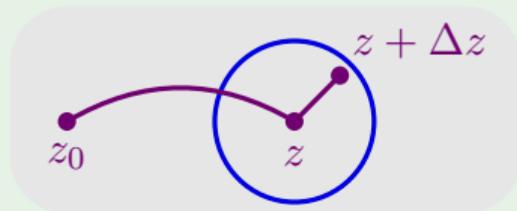
对于任意固定的  $z_0 \in D$ , 定义

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

## 定理

$F(z)$  是  $D$  内的解析函数, 且  $F'(z) = f(z)$ .

## 证明



以  $z$  为中心作一包含在  $D$  内的圆  $K$ , 取  $|\Delta z|$  小于  $K$  的半径. 那么

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_z^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta.$$

容易知道  $\int_z^{z + \Delta z} f(z) d\zeta = f(z) \int_z^{z + \Delta z} d\zeta = f(z)\Delta z$ . 我们需要比较上述两个积分, 其中  $z$  到  $z + \Delta z$  取直线.

## 续证

由于  $f(z)$  解析, 因此连续.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  使得当  $|\zeta - z| < \delta$  时,  $z$  落在  $K$  中且  $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ . 当  $|\Delta z| < \delta$  时, 由长大不等式

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| &= \left| \int_z^{z + \Delta z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\Delta z} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \cdot |\Delta z| = \varepsilon. \end{aligned}$$

由于  $\varepsilon$  是任意的, 因此

$$f(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = F'(z).$$

□

如果  $D$  上的解析函数  $G(z)$  满足  $G'(z) = f(z)$ , 则称  $G(z)$  是  $f(z)$  的一个原函数. 由于导函数为 0 的解析函数只能是常值函数, 因此  $G(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + C$ . 我们称之为  $f(z)$  的不定积分, 记为  $\int f(z) dz$ .

### 复变函数积分计算方法 II

设  $f(z)$  在单连通区域  $D$  上解析,  $z_1$  至  $z_2$  的积分路径落在  $D$  内, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1),$$

其中  $F(z)$  是  $f(z)$  的一个原函数.

复变函数和实变函数的牛顿-莱布尼兹定理的差异在哪呢? 复变情形要求是单连通区域上解析函数, 实变情形要求是闭区间上连续函数.

例

求  $\int_{z_0}^{z_1} z dz$ .

解

由于  $f(z) = z$  处处解析, 且  $\int z dz = \frac{1}{2}z^2 + C$ , 因此

$$\int_{z_0}^{z_1} z dz = \frac{1}{2}z^2 \Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

因此之前的例子中  $\int_0^{3+4i} z dz = -\frac{7}{2} + 12i$ , 无论从 0 到  $3 + 4i$  的路径如何.

例

求  $\int_0^{\pi i} z \cos z^2 dz$ .

解

由于  $f(z) = z \cos z^2$  处处解析, 且

$$\int z \cos z^2 dz = \frac{1}{2} \int \cos z^2 dz^2 = \frac{1}{2} \sin z^2 + C,$$

因此

$$\int_0^{\pi i} z \cos z^2 dz = \frac{1}{2} \sin z^2 \Big|_0^{\pi i} = -\frac{1}{2} \sin \pi^2.$$

这里我们使用了**凑微分法**.

例

求  $\int_0^i z \cos z \, dz$ .

解

由于  $f(z) = z \cos z$  处处解析, 且

$$\int z \cos z \, dz = \int z \, d(\sin z) = z \sin z - \int \sin z \, dz = z \sin z + \cos z + C,$$

因此

$$\int_0^i z \cos z \, dz = (z \sin z + \cos z) \Big|_0^i = i \sin i + \cos i - 1 = e^{-1} - 1.$$

这里我们使用了分部积分法.

## 典型例题: 利用原函数求积分

例

$$\text{求 } \int_1^{1+i} z e^z dz.$$

解

由于  $f(z) = z e^z$  处处解析, 且  $\int z e^z dz = \int z de^z = z e^z - \int e^z dz = (z - 1)e^z + C$ ,  
因此  $\int_1^{1+i} z e^z dz = (z - 1)e^z \Big|_1^{1+i} = i e^{1+i} = e(-\sin 1 + i \cos 1)$ .

练习

$$\text{求 } \int_0^1 z \sin z dz = \underline{\sin 1 - \cos 1}.$$

## 典型例题: 利用原函数求积分

例

$$\text{求 } \int_C (2z^2 + 8z + 1) dz, \text{ 其中 } C \text{ 是摆线 } \begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta), \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

解

由于  $f(z) = 2z^2 + 8z + 1$  处处解析, 因此

$$\text{原积分} = \int_0^{2\pi a} (2z^2 + 8z + 1) dz = \left( \frac{2}{3}z^3 + 4z^2 + z \right) \Big|_0^{2\pi a} = \frac{16}{3}\pi^3 a^3 + 16\pi^2 a^2 + 2\pi a.$$

## 典型例题: 利用原函数求积分

### 例

设  $C$  为沿着  $|z|=1$  从  $1$  到  $i$  的逆时针圆弧, 求  $\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$ .

### 解

函数  $f(z) = \frac{\ln(z+1)}{z+1}$  在单连通区域  $\operatorname{Re} z > -1$  内解析.

$$\int \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz = \int \ln(z+1) d[\ln(z+1)] = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) + C.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz &= \frac{1}{2} \ln^2(z+1) \Big|_1^i = \frac{1}{2} [\ln^2(1+i) - \ln^2 2] \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i \right)^2 - \ln^2 2 \right) = -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8} \ln^2 2 + \frac{\pi \ln 2}{8} i. \end{aligned}$$

## 第四节 柯西积分公式

- 柯西积分公式
- 高阶导数的柯西积分公式

柯西-古萨基本定理是解析函数理论的基础,但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

## 柯西积分公式

设

- 函数  $f(z)$  在 (复合) 闭路  $C$  及其内部 (围成的区域)  $D$  解析,
- $z_0 \in D$ ,

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

如果  $z_0 \notin \bar{D}$ , 由柯西-古萨基本定理, 右侧的积分是 0.



## 证明

由连续性可知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  使得当  $|z - z_0| \leq \delta$  时,  $z \in D$  且  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ .  
 设  $\Gamma: |z - z_0| = \delta$ , 则

$$\begin{aligned} \left| \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| &\stackrel{\text{复合闭路定理}}{=} \left| \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| \\ &= \left| \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_{\Gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \right| = \left| \oint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

由  $\varepsilon$  的任意性可知  $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$ . □

从柯西积分公式可以看出, 被积函数分子解析而分母形如  $z - z_0$  时, 绕闭路的积分可以使用该公式计算.

**例**

$$\text{求 } \oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz.$$

**解**

函数  $\sin z$  处处解析. 取  $f(z) = \sin z, z_0 = 0$  并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi i \sin z|_{z=0} = 0.$$

# 典型例题: 柯西积分公式的应用

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz.$$

解

由于函数  $e^z$  处处解析, 取  $f(z) = e^z, z_0 = 1$  并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i e^z \Big|_{z=1} = 2\pi e i.$$

练习

$$\text{求 } \oint_{|z|=2\pi} \frac{\cos z}{z-\pi} dz = \underline{-2\pi i}.$$



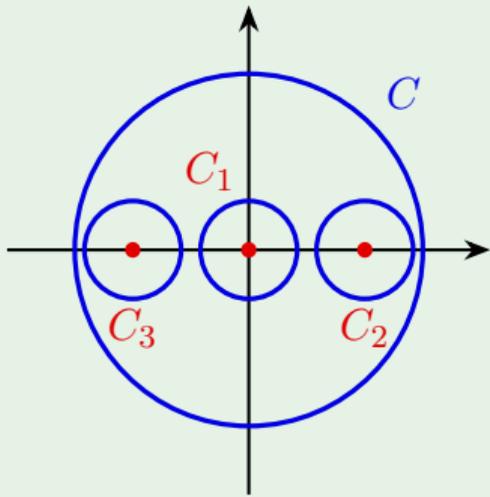
## 例

求  $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz$ .

## 解

被积函数的奇点为  $0, \pm 1$ . 设  $C_1, C_2, C_3$  分别为绕  $0, 1, -1$  的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz &= \oint_{C_1+C_2+C_3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz \\ &= 2\pi i \left( \left. \frac{e^z}{z^2-1} \right|_{z=0} + \left. \frac{e^z}{z(z+1)} \right|_{z=1} + \left. \frac{e^z}{z(z-1)} \right|_{z=-1} \right) \\ &= 2\pi i \left( -1 + \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = \pi i (e + e^{-1} - 2). \end{aligned}$$



解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数是任意阶可导的.

### 柯西积分公式

设函数  $f(z)$  在闭路或复合闭路  $C$  及其内部  $D$  解析, 则对任意  $z_0 \in D$ ,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

假如  $f(z)$  有泰勒展开

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots$$

那么由  $\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n}$  的性质可知上述公式右侧应当为  $f^{(n)}(z_0)$ .







## 典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz.$$

解

被积函数在  $|z| < 2$  的奇点为  $z = \pm i$ . 取  $C_1, C_2$  为以  $i, -i$  为圆心的分离圆周.

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1} \left( \frac{e^z}{(z+i)^2} \right)' \Big|_{z=i} = 2\pi i \left( \frac{e^z}{(z+i)^2} - \frac{2e^z}{(z+i)^3} \right) \Big|_{z=i} = \frac{(1-i)e^{i\pi}}{2}.$$

$$\text{类似地, } \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{-(1+i)e^{-i\pi}}{2}. \text{ 故}$$

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz &= \left( \oint_{C_1} + \oint_{C_2} \right) \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz \\ &= \frac{(1-i)e^{i\pi}}{2} + \frac{-(1+i)e^{-i\pi}}{2} = \pi i(\sin 1 - \cos 1). \end{aligned}$$







高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同? 高阶柯西积分公式说明, 函数  $f(z)$  只要在区域  $D$  中处处可导, 它就一定无限次可导, 并且各阶导数仍然在  $D$  中解析. **这一点与实变量函数有本质的区别.**

同时我们也可以看出, 如果一个二元实函数  $u(x, y)$  是一个解析函数的实部或虚部, 则  $u$  也是具有任意阶偏导数. 这便引出了调和函数的概念.

## 第五节 解析函数与调和函数的关系

- 调和函数
- 共轭调和函数

调和函数是一类重要的二元实变函数, 它和解析函数有着紧密的联系. 为了简便, 我们用  $u_{xx}, u_{yy}$  来表示二阶偏导数.

### 定义

如果二元实变函数  $u(x, y)$  在区域  $D$  内有二阶连续偏导数, 且满足拉普拉斯方程

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

则称  $u(x, y)$  是  $D$  内的调和函数.

## 定理

区域  $D$  内解析函数  $f(z)$  的实部和虚部都是调和函数.

## 证明

设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , 则  $u, v$  存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

由于  $f(z)$  任意阶可导, 因此  $u, v$  存在任意阶偏导数. 由  $C-R$  方程  $u_x = v_y, u_y = -v_x$  可知

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0. \quad \square$$

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

如果  $u + iv$  是区域  $D$  内的解析函数, 则我们称  $v$  是  $u$  的**共轭调和函数**. 换言之  $u_x = v_y, u_y = -v_x$ . 显然  $-u$  是  $v$  的共轭调和函数.

### 定理

设  $u(x, y)$  是单连通域  $D$  内的调和函数, 则线积分

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy + C$$

是  $u$  的共轭调和函数.

由此可知, 区域  $D$  上的调和函数在  $z \in D$  的一个邻域内是一解析函数的实部, 从而在该邻域内具有任意阶连续偏导数. 而  $z$  的任取的, 因此调和函数总具有任意阶连续偏导数.

如果  $D$  是多连通区域, 则未必存在共轭调和函数. 例如  $\ln(x^2 + y^2)$  是复平面去掉原点上的调和函数, 但它并不是某个解析函数的实部. 事实上, 它是  $2 \operatorname{Ln} z$  的实部.

在实际计算中, 我们**一般不用线积分**来得到共轭调和函数, 而是采用下述两种办法:

### 偏积分法

通过  $v_y = u_x$  解得  $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$ , 其中  $\psi(x)$  待定. 再代入  $u_y = -v_x$  中解出  $\psi(x)$ .

### 不定积分法

对  $f'(z) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$  求不定积分得到  $f(z)$ .

## 典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

**例**

证明  $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$  是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

**解**

- 由  $u_x = -6xy, u_y = 3y^2 - 3x^2$  可知  $u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0$ , 故  $u$  是调和函数.
- 由  $v_y = u_x = -6xy$  得  $v = -3xy^2 + \psi(x)$ .
- 由  $v_x = -u_y = 3x^2 - 3y^2$  得  $\psi'(x) = 3x^2, \psi(x) = x^3 + C$ .
- 故  $v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + C$ ,

$$f(z) = u + iv = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3 + C) = i(x + iy)^3 + iC = i(z^3 + C).$$

## 典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

当解析函数  $f(z)$  为  $x, y$  的多项式形式时, 将  $m$  次齐次的项放在一起, 则  $x^m$  的系数就是  $f(z)$  中  $z^m$  的系数.

在上例中我们也可由另一种方法计算得到:

$$f'(z) = u_x - iu_y = -6xy - i(3y^2 - 3x^2) = 3iz^2.$$

因此  $f(z) = iz^3 + C$ .

## 典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

例

求解析函数  $f(z)$  使得它的虚部为

$$v(x, y) = e^x(y \cos y + x \sin y) + x + y.$$

解

由  $u_x = v_y = e^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1$  得

$$u = e^x(x \cos y - y \sin y) + x + \psi(y).$$

由  $u_y = -v_x = -e^x(y \cos y + x \sin y + \sin y) - 1$  得

$$\psi'(y) = -1, \quad \psi(y) = -y + C.$$

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv = e^x(x \cos y - y \sin y) + x - y + C + i[e^x(y \cos y + x \sin y) + x + y] \\ &= ze^z + (1+i)z + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

这里, 我们只需看  $e^x \cos y$  的系数  $x + iy = z$ , 即  $f(z)$  中  $e^z$  的系数.



## 第四章 级数

- ① 复数项级数
- ② 幂级数
- ③ 泰勒级数
- ④ 洛朗级数

## 第一节 复数项级数

- 复数项级数
- 绝对收敛和条件收敛



# 复数项级数敛散性的判定

## 定理

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi \text{ 当且仅当 } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b.$$

## 证明

设部分和

$$\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

则

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + i\tau_n.$$

由复数项的敛散性判定条件可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a + bi \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = b.$$

于是命题得证. □

# 复数项级数敛散性的判定

## 定理

如果实数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  也收敛, 且  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ .

## 证明

因为  $|x_n|, |y_n| \leq |z_n|$ , 由比较判别法可知实数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$  绝对收敛, 从而收敛. 故  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  也收敛.

由三角不等式可知  $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$ . 两边同时取极限即得级数的不等式关系

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |z_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|,$$

其中第二个等式是因为绝对值函数  $|z|$  连续. □

## 定义

- (1) 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  **绝对收敛**.
- (2) 称收敛但不绝对收敛的级数**条件收敛**.

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性, 且不改变其和. 一般的级数重排有限项不改变其敛散性与和, 但如果重排无限项则可能会改变其敛散性与和.

## 定理

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

## 证明

必要性由前一定理的证明已经知道, 充分性由  $|z_n| \leq |x_n| + |y_n|$  加上正项级数可重排得到. □



例

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i^n}{n}$  发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解

由于实部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{2}{8} + \cdots > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

发散，所以该级数发散。

它的虚部级数是一个交错级数，从而是条件收敛的。

例

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$  发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解

因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

均条件收敛, 所以原级数条件收敛.

### 练习

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{2^n} \right]$  发散、条件收敛、还是绝对收敛?

### 答案

实部级数条件收敛, 虚部级数绝对收敛, 所以该级数条件收敛.

由正项级数的判别法可以得到:

- (1) **达朗贝尔判别法 (比值法)**:  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$  (假设存在);
  - (2) **柯西判别法 (根式法)**:  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$  (假设存在);
  - (3) **柯西-阿达马判别法**:  $\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$  (子数列中极限的最大值).
- 当  $\lambda < 1$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  绝对收敛.
  - 当  $\lambda > 1$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  发散.
  - 当  $\lambda = 1$  时, 无法使用该方法判断敛散性.

其证明是通过将该级数与相应的等比级数做比较得到的.

## 典型例题: 判断级数的敛散性

例

级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!}$  发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n+1} = 0$ , 所以该级数绝对收敛.

实际上, 它的实部和虚部级数分别为

$$1 - \frac{8^2}{2!} + \frac{8^4}{4!} - \cdots = \cos 8, \quad 8 - \frac{8^3}{3!} + \frac{8^5}{5!} - \cdots = \sin 8,$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!} = \cos 8 + i \sin 8 = e^{8i}.$$

## 第二节 幂级数

- 幂级数的收敛域
- 收敛半径的计算
- 幂级数的运算性质

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

### 定义

- 设  $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$  是一个复变函数列, 其中每一项都在区域  $D$  上有定义. 表达式  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  称为**复变函数项级数**.
- 对于  $z_0 \in D$ , 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  在  $z_0$  处**收敛**, 相应级数的值称为它的**和**.
- 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  在  $D$  上处处收敛, 则它的和是一个函数, 称为**和函数**.
- 称形如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  的函数项级数为**幂级数**.

我们只需要考虑  $a = 0$  情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

## 阿贝尔定理

- (1) 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在  $z_0 \neq 0$  处收敛, 那么对任意  $|z| < |z_0|$  的  $z$ , 该级数必绝对收敛.
- (2) 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在  $z_0 \neq 0$  处发散, 那么对任意  $|z| > |z_0|$  的  $z$ , 该级数必发散.

## 证明

- (1) 因为级数收敛, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$ . 故存在  $M$  使得  $|c_n z_0^n| < M$ . 对于  $|z| < |z_0|$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n = \frac{M}{1 - \left| \frac{z}{z_0} \right|}.$$

所以级数在  $z$  处绝对收敛. (2)是(1)的逆否命题. □





由正项级数的相应判别法容易得到公式  $R = \frac{1}{r}$ , 其中

(1) 达朗贝尔公式 (比值法):  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$  (假设存在);

(2) 柯西公式 (根式法):  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  (假设存在);

(3) 柯西-阿达马公式:  $r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ .

如果  $r = 0$  或  $+\infty$ , 则  $R = +\infty$  或  $0$ .















例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1}$  的收敛半径与和函数.

解

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} - 1}{2^{n+1} - 1} = 2$  可知收敛半径为  $\frac{1}{2}$ . 当  $|z| < \frac{1}{2}$  时,  $|2z| < 1$ . 从而

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \\ &= \frac{2}{1 - 2z} - \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{(1 - 2z)(1 - z)}. \end{aligned}$$



## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

通过对

$$1 + \lambda z + \lambda^2 z^2 + \cdots = \frac{1}{1 - \lambda z}$$

两边求  $k$  阶导数可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+k) \cdots (n+2)(n+1) \lambda^n z^n = \frac{k!}{(1-\lambda z)^{k+1}}.$$

因此如果  $p(n)$  是次数为  $m-1$  的多项式, 那么

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) \lambda^n z^n = \frac{P(z)}{(1-\lambda z)^m},$$

其中  $P$  是多项式.

## 典型例题：幂级数的收敛半径与和函数

一般地, 如果幂级数的系数形如

$$c_n = p_1(n)\lambda_1^n + \cdots + p_k(n)\lambda_k^n,$$

则和函数一定是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{P(z)}{(1-\lambda_1 z)^{m_1} \cdots (1-\lambda_k z)^{m_k}}$$

的有理函数, 其中  $m_j = \deg p_j + 1$ . 反过来这样的分式展开成幂级数的系数也一定有上述形式, 至多有有限多项例外. 这可以帮助我们进行计算的验证.

### 练习

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  的收敛半径与和函数.

### 答案

收敛半径为 1, 和函数为  $-\ln(1-z)$ .

## 例：函数项级数的积分

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz.$$

解

由于  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  在  $|z| < 1$  收敛，它的和函数解析。因此

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz &= \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z} dz + \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz \\ &= 2\pi i + 0 = 2\pi i. \end{aligned}$$

### 第三节 泰勒级数

- 泰勒展开的形式与性质
- 泰勒展开的计算方法

我们知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在**泰勒级数**展开?

在高等数学中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

它处处可导, 但是它在 0 处的各阶导数都是 0. 因此它的泰勒级数是 0, 余项恒为  $f(x)$ . 除 0 外它的泰勒级数均不收敛到原函数.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它成立的范围也很难从函数本身读出.  
例如

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

这可以从  $x = -1$  是奇点看出. 而

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad |x| < 1$$

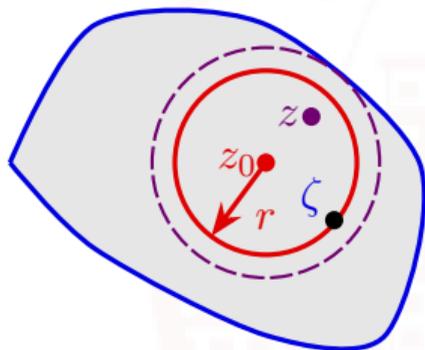
却并没有奇点. 为什么它的麦克劳林级数成立的开区间也是  $(-1, 1)$ ? 这个问题在本节可以得到回答.

## 泰勒展开的形式

设函数  $f(z)$  在区域  $D$  解析,  $z_0 \in D$ . 设  $|z - z_0|$  小于  $z_0$  到  $D$  边界的距离  $d$ , 则存在  $|z - z_0| < r < d$ . 设  $K: |\zeta - z_0| = r$ , 则  $K$  和它的内部包含在  $D$  中. 由于

$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$ , 因此

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$



故

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_K f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n + R_N(z), \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + R_N(z),
 \end{aligned}$$

其中

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K f(\zeta) \left[ \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^N d\zeta.$$

么 由于  $f(\zeta)$  在  $D \supseteq K$  上解析, 从而在  $K$  上连续且有界. 设  $|f(\zeta)| \leq M, \zeta \in K$ , 那

$$\begin{aligned} |R_N(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_K \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^N \right| ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r - |z - z_0|} \cdot \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^N \cdot 2\pi r \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < d.$$



## 幂级数展开的唯一性

对于  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ , 它的奇点为  $\pm i$ , 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  的麦克劳林展开成立的开区间是  $(-1, 1)$ .

若  $f(z)$  在  $z_0$  附近展开为  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ , 则由幂级数的逐项求导性质可知

$$f^{(n)}(z_0) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1)\cdots(k-n+1)(z-z_0)^{k-n} \Big|_{z=z_0} = n!c_n.$$

所以**解析函数的幂级数展开是唯一的**. 由此, 解析函数的泰勒展开不仅可以**直接求出各阶导数得到**, 也可以**利用幂级数的运算法则得到**.

如果函数  $f(z)$  在一幂级数所有收敛的点处与其和函数相同, 则  $g(z)$  **一定在收敛圆周上有奇点**. 这是因为一旦  $f(z)$  在收敛圆周上处处解析, 它就可以在一个半径更大的圆域上泰勒展开成该幂级数.



## 例

由  $e^z$  的泰勒展开可得

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n - (-iz)^n}{2i \cdot n!} \\ &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z.\end{aligned}$$

这里, 因为  $\sin z$  是奇函数, 所以它的麦克劳林展开只有奇数幂次项, 没有偶数幂次项.









**例**

求  $\frac{1}{3z-2}$  的麦克劳林展开.

**解**

由于  $\frac{1}{3z-2}$  的奇点为  $z = \frac{2}{3}$ , 因此它在  $|z| < \frac{2}{3}$  内解析. 此时

$$\begin{aligned}\frac{1}{3z-2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3z}{2}\right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} z^n, \quad |z| < \frac{2}{3}.\end{aligned}$$





## 第四节 洛朗级数

- 双边幂级数
- 洛朗展开的形式
- 洛朗展开的计算方法

















令

$$\begin{aligned}
 R_N(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} \cdot \left( \frac{\zeta-z_0}{z-z_0} \right)^{N-1} d\zeta.
 \end{aligned}$$

由于  $f(\zeta)$  在  $D \supseteq K_1$  上解析, 从而在  $K_1$  上连续且有界. 设  $|f(\zeta)| \leq M, \zeta \in K_1$ , 那么

$$\begin{aligned}
 |R_N(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} \cdot \left( \frac{\zeta-z_0}{z-z_0} \right)^{N-1} \right| ds \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{|z-z_0|-r} \cdot \left| \frac{\zeta-z_0}{z-z_0} \right|^{N-1} \cdot 2\pi r \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \right] (z - z_0)^{-n},$$

其中  $r < |z - z_0| < R$ . 由复合闭路定理,  $K_1, K_2$  可以换成任意一条在圆环域内绕  $z_0$  的闭路  $C$ . 从而我们得到  $f(z)$  在以  $z_0$  为圆心的圆环域的洛朗展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n,$$

其中  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ .





## 典型例题: 求洛朗展开

**另解**

$$\frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left( z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n.$$

**例**

在下列圆环域中把  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  展开为洛朗级数.

(1)  $0 < |z| < 1$ ,      (2)  $1 < |z| < 2$ ,      (3)  $2 < |z| < +\infty$ .

**解**

由于  $f(z)$  的奇点为  $z = 1, 2$ , 因此在这些圆环域内  $f(z)$  解析. 我们有

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

## 续解

(1) 由于  $|z| < 1$ ,  $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ , 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2-z} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \cdots \end{aligned}$$

续解

(2) 由于  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$ , 因此

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\
 &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \\
 &= \dots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \dots
 \end{aligned}$$



洛朗展开的一些特点可以帮助我们检验计算的正确性.

- 若  $f(z)$  在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 则  $f(z)$  可以展开为泰勒级数. 由唯一性可知泰勒级数等于洛朗级数, 因此此处洛朗展开一定没有负幂次项.
- 有理函数的洛朗展开在  $0 < |z - z_0| < r$  最多只有有限多负幂次项, 在  $R < |z - z_0| < +\infty$  最多只有有限多正幂次项, 在其它圆环域总有无穷多负幂次和无穷多正幂次项.

有理函数  $f(z)$  在圆环域  $r < |z| < R$  内的洛朗展开总形如

$$f(z) = P(z) + \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n < 0} b_n z^n,$$

其中  $P(z)$  只有有限多项,  $a_n$  和  $b_n$  是形如  $p(n)\lambda^{-n}$  的线性组合,  $\lambda$  是奇点,  $\deg p + 1$  是  $\lambda$  在  $f(z)$  分母出现的重数, 其中  $|\lambda| \geq R$  的那些项出现在  $a_n$  中, 而  $|\lambda| \leq r$  的那些项出现在  $b_n$  中.

不仅如此, 从  $f(z)$  在任一圆环域上的展开可以得到其它圆环域上的展开, 只需要将需要变化求和范围的那些项  $n$  的求和范围变化, 系数变号.

例如在  $0 < |z| < 1$  内,

$$f(z) = \frac{120}{(z-1)(z^2-4)(z^2-9)} = \sum_{n \geq 0} \left( -5 + \frac{2}{(-2)^{n+1}} + \frac{6}{2^{n+1}} - \frac{1}{(-3)^{n+1}} - \frac{2}{3^{n+1}} \right) z^n.$$

那么在  $2 < |z| < 3$  内洛朗展开需要变动奇点  $1, \pm 2$  对应的项:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \left( -\frac{1}{(-3)^{n+1}} - \frac{2}{3^{n+1}} \right) z^n + \sum_{n \leq -1} \left( 5 - \frac{2}{(-2)^{n+1}} - \frac{6}{2^{n+1}} \right) z^n.$$

感兴趣的同学可阅读 [《复变函数在不同圆环域内洛朗展开的联系》](#).





注意到当  $n = -1$  时，洛朗级数的系数

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分，这便引出了**留数**的概念.



## 第五章 留数

- ① 孤立奇点
- ② 留数
- ③ 留数在定积分的应用 \*

## 第一节 孤立奇点

- 孤立奇点的类型
- 零点与极点
- 函数在  $\infty$  的性态



### 定义

如果  $z_0$  是  $f(z)$  的一个奇点, 且  $z_0$  的某个邻域内没有其它奇点, 则称  $z_0$  是  $f(z)$  的一个孤立奇点.

### 例

- $z = 0$  是  $e^{1/z}, \frac{\sin z}{z}$  的孤立奇点.
- $z = -1$  是  $\frac{1}{z(z+1)}$  的孤立奇点.
- $z = 0$  不是  $\frac{1}{\sin(1/z)}$  的孤立奇点.

若  $f(z)$  只有有限多个奇点, 则这些奇点都是孤立奇点.

如果  $f(z)$  在孤立奇点  $z_0$  的去心邻域  $0 < |z - z_0| < \delta$  内解析, 则可以作  $f(z)$  的洛朗展开. 根据该洛朗级数主要部分的项数, 我们可以将孤立奇点分为三种:

孤立奇点类型	洛朗级数特点	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$
可去奇点	没有主要部分	存在
$m$ 阶极点	主要部分只有有限项非零 最低次为 $-m$ 次	$\infty$
本性奇点	主要部分有无限项非零	不存在且不为 $\infty$









令

$$g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots,$$

则  $g(z)$  在  $z_0$  解析且非零, 且

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, 0 < |z - z_0| < \delta.$$

## 定理

- (1)  $z_0$  是  $f(z)$  的  $m$  阶极点  $\iff \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$  存在且非零.
- (2)  $z_0$  是  $f(z)$  的极点  $\iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .

例

$f(z) = \frac{3z + 2}{z^2(z + 2)}$ , 由于  $\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = 1$ , 因此  $0$  是  $2$  阶极点. 同理  $-2$  是  $1$  阶极点.

练习

求  $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^2 - z + 1}$  的奇点, 并指出极点的阶.

答案

$-1$  是  $1$  阶极点,  $1$  是  $2$  阶极点.

我们来研究极点与零点的联系, 并给出极点的阶的计算方法.

### 定义

如果  $f(z)$  在解析点  $z_0$  处的泰勒级数最低次项幂次是  $m \geq 1$ , 即

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots, \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

其中  $c_m \neq 0$ , 则称  $z_0$  是  $f(z)$  的  $m$  阶零点.

此时  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ ,  $g(z)$  在  $z_0$  解析且  $g(z_0) \neq 0$ .

### 定理

设  $f(z)$  在  $z_0$  解析.  $z_0$  是  $m$  阶零点  $\iff \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-m} f(z)$  存在

$$\iff f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

例

$f(z) = z(z-1)^3$  有 1 阶零点 0 和 3 阶零点 1.

例

$f(z) = \sin z^5 - z^5$ . 由于

$$f(z) = -\frac{z^{15}}{3!} + \frac{z^{25}}{5!} + \cdots$$

因此 0 是 15 阶零点.

## 定理

非零的解析函数的零点总是孤立的.

## 证明

设  $f(z)$  是区域  $D$  上的非零解析函数,  $z_0 \in D$  是  $f(z)$  的一个零点. 由于  $f(z)$  不恒为零, 因此存在  $m \geq 1$  使得在  $z_0$  的一个邻域内  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ ,  $g(z)$  在  $z_0$  处解析且非零.

对于  $\varepsilon = \frac{1}{2}|g(z_0)|$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $z \in \overset{\circ}{U}(z_0, \delta) \subseteq D$  时,  $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon$ . 从而  $g(z) \neq 0$ ,  $f(z) \neq 0$ . □

若解析函数  $f(z)$  满足对任意实数  $x$ ,  $f(x) = e^x$ , 那么所有实数都是解析函数  $f(z) - e^z$  的零点, 从而  $f(z) \equiv e^z$ .







在复平面添加了  $\infty$  之后, 从几何上看它变成了一个球面. 这样的一个球面是一种封闭的曲面, 它具有某些整体性质.

当我们需要计算一个闭路上函数的积分的时候, 我们需要研究闭路内部每一个奇点处的洛朗展开, 从而得到相应的小闭路上的积分. 如果在这个闭路内部的奇点比较多, 而外部的奇点比较少时, 这样计算就不太方便. 此时如果通过变量替换  $z = \frac{1}{t}$ , 转而研究闭路外部奇点处的洛朗展开, 便可减少所需考虑的奇点个数, 从而降低所需的计算量. 因此我们需要研究函数在  $\infty$  的性态.

### 定义

如果函数  $f(z)$  在  $\infty$  的去心邻域  $R < |z| < +\infty$  内没有奇点, 则称  $\infty$  是  $f(z)$  的**孤立奇点**.

设  $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ , 则研究  $f(z)$  在  $\infty$  的性质可以转为研究  $g(t)$  在  $0$  的性质.  $g(t)$  在圆环域  $0 < |t| < \frac{1}{R}$  上解析,  $0$  是它的孤立奇点.

### 定义

如果  $0$  是  $g(t)$  的可去奇点 ( $m$  阶极点、本性奇点), 则称  $\infty$  是  $f(z)$  的**可去奇点** ( $m$  阶极点、本性奇点).











## 例

证明非常数复系数多项式  $p(z)$  总有复零点.

## 证明

假设多项式  $p(z)$  没有复零点, 那么  $f(z) = \frac{1}{p(z)}$  在复平面上处处解析, 从而  $f(z)$  在  $0$  处可以展开为幂级数.

由于  $\infty$  是  $p(z)$  的极点,  $\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty$ . 因此  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ ,  $\infty$  是  $f(z)$  的可去奇点. 这意味着  $f(z)$  在  $0$  处的洛朗展开没有正幂次项. 二者结合可知  $f(z)$  只能是常数, 矛盾!  $\square$

设  $z_1$  是  $n$  次多项式  $p(z)$  的零点, 则  $\frac{p(z)}{z - z_1}$  是  $n - 1$  次多项式. 归纳可知,  $p(z)$  可以分解为  $p(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$ .

## 第二节 留数

- 留数定理
- 留数的计算方法
- 在  $\infty$  的留数 \*

## 定义

设  $z_0$  为  $f(z)$  的孤立奇点,  $f(z)$  在它的某个去心邻域内的洛朗展开为

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots .$$

称

$$\text{Res}[f(z), z_0] := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

为函数  $f(z)$  在  $z_0$  的留数, 其中  $C$  为该去心邻域中绕  $z_0$  的一条闭路.

可以看出, 知道留数之后可以用来计算积分.

## 复变函数积分计算方法 III: 留数定理

若  $f(z)$  在闭路  $C$  上解析, 在  $C$  内部的奇点为  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , 则

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$

证明



由复闭路定理,  $\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k].$  □







## 证明

设

$$f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + \cdots,$$

$$g(z) = c_{-m} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0(z - z_0)^m + \cdots,$$

则  $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ . 由泰勒展开系数与函数导数的关系可知

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0). \quad \square$$





## 练习

$$\text{求 } \text{Res} \left[ \frac{e^z - 1}{z^5}, 0 \right] = \frac{1}{24}.$$







## 定义

设  $\infty$  为  $f(z)$  的孤立奇点,  $f(z)$  在某个  $R < |z| < +\infty$  内的洛朗展开为

$$f(z) = \cdots + c_{-1}z^{-1} + c_0 + c_1z + \cdots$$

称

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] := -c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z) dz$$

为函数  $f(z)$  在  $\infty$  的留数, 其中  $C$  为该圆环域中绕 0 的一条闭路.

由于

$$f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2} = \cdots + \frac{c_1}{z^3} + \frac{c_0}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_{-2} + \cdots$$

因此  $\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0\right]$ .













### 第三节 留数在定积分的应用 \*

- 正弦余弦的有理函数的积分
- 有理函数的广义积分
- 有理函数与三角函数之积的广义积分
- 其它例子

本节中我们将对若干种在实变中难以计算的定积分和广义积分使用复变函数和留数的技巧进行计算. 本节内容不作考试要求.

考虑  $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ , 其中  $R$  是一个有理函数. 令  $z = e^{i\theta}$ , 则  $dz = iz d\theta$ ,

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 - 1}{2iz},$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \oint_{|z|=1} R \left( \frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz} \right) \frac{1}{iz} dz.$$

由于被积函数是一个有理函数, 它的积分可以由  $|z| < 1$  内奇点留数得到.

例

$$\text{求 } \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 - 3 \cos \theta} d\theta.$$

解

令  $z = e^{i\theta}$ , 则  $dz = iz d\theta$ ,

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 - 1}{2iz},$$

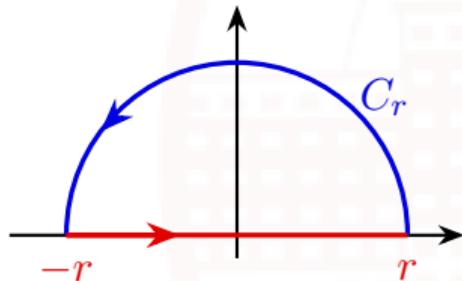
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 - 3 \cos \theta} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{(z^2 - 1)^2}{-4z^2} \cdot \frac{1}{5 - 3 \frac{z^2 + 1}{2z}} \cdot \frac{dz}{iz} = -\frac{i}{6} \oint_{|z|=1} \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(z - 3)(z - \frac{1}{3})} dz.$$

设  $f(z) = \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(z - 3)(z - \frac{1}{3})}$ , 则  $\text{Res}[f(z), 0] = \frac{10}{3}, \text{Res}[f(z), \frac{1}{3}] = -\frac{8}{3}$ ,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 - 3 \cos \theta} d\theta = -\frac{i}{6} \cdot 2\pi i \left[ \text{Res}[f(z), 0] + \text{Res}[f(z), \frac{1}{3}] \right] = \frac{2\pi}{9}.$$

考虑  $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ , 其中  $R(x)$  是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根. 我们先考虑  $\int_{-r}^r R(x) dx$ . 设  $f(z) = R(z)$ ,  $C = C_r + [-r, r]$  如下图所示, 使得上半平面内  $f(z)$  的奇点均在  $C$  内, 则

$$2\pi i \sum_{\text{Im } a > 0} \text{Res}[f(z), a] = \oint_C f(z) dz = \int_{-r}^r R(x) dx + \int_{C_r} f(z) dz.$$



由于  $P(x)$  分母次数比分子至少高 2 次, 当  $r \rightarrow +\infty$  时,

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leq \pi r \max_{|z|=r} |f(z)| = \pi \max_{|z|=r} |zf(z)| \rightarrow 0.$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}[R(z), a].$$

这里我们考虑的广义积分都是指柯西主值

$$P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx.$$

## 例: 留数在定积分上的应用

例

$$\text{求 } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}, a > 0.$$

解

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^3} \text{ 在上半平面内的奇点为 } ai.$$

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), ai] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow ai} \left[ \frac{1}{(z + ai)^3} \right]'' \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow ai} \frac{12}{(z + ai)^5} = \frac{3}{16a^5 i}, \end{aligned}$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = 2\pi i \text{Res}[f(z), ai] = \frac{3\pi}{8a^5}.$$

考虑  $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \lambda x dx, \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \lambda x dx$ , 其中  $R(x)$  是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根. 和前一种情形类似, 我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } a > 0} \text{Res}[R(z) e^{i\lambda z}, a],$$

因此所求积分分别为它的实部和虚部.

例

$$\text{求 } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + a^2)^2}, a > 0.$$

解

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)^2} \text{ 在上半平面内的奇点为 } ai,$$

$$\text{Res}[f(z), ai] = \lim_{z \rightarrow ai} \left[ \frac{e^{iz}}{(z + ai)^2} \right]' = -\frac{e^{-a}(a + 1)i}{4a^3}.$$

$$\text{故 } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} \, dx}{(x^2 + a^2)^2} = 2\pi i \text{Res}[f(z), ai] = \frac{\pi e^{-a}(a + 1)}{2a^3},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi e^{-a}(a + 1)}{2a^3}.$$

## 例: 留数在定积分上的应用

最后我们再来看一个例子.

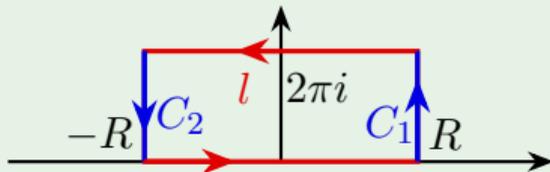
例

求积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x(x+1)} dx, 0 < p < 1.$

解

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x(x+1)} dx \xrightarrow{\text{令 } x=e^t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{e^t + 1} dt.$$

考虑  $f(z) = \frac{e^{pz}}{e^z + 1}$  在如下闭路  $C$  上的积分.



## 续解

由于  $l: z = t + 2\pi i, -R \leq t \leq R$ , 因此

$$\int_l f(z) dz = \int_R^{-R} \frac{e^{2p\pi i} \cdot e^{pt}}{e^t + 1} dt = -e^{2p\pi i} \int_{-R}^R f(t) dt.$$

由于  $C_1: z = R + it, 0 \leq t \leq 2\pi$ , 因此

$$\left| \int_{C_1} f(z) dz \right| \leq \frac{e^{pR}}{e^R - 1} \cdot 2\pi \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty).$$

同理

$$\left| \int_{C_2} f(z) dz \right| \leq \frac{e^{-pR}}{1 - e^{-R}} \cdot 2\pi \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty).$$

## 续解

由于

$$\operatorname{Res}[f(z), \pi i] = \frac{e^{pz}}{(e^z + 1)'} \Big|_{z=\pi i} = -e^{p\pi i},$$

因此

$$\begin{aligned} & \left( \int_{-R}^R + \int_l + \int_{C_1} + \int_{C_2} \right) f(z) dz \\ &= \oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \pi i] = -2\pi i e^{p\pi i}, \end{aligned}$$

令  $R \rightarrow +\infty$ , 则

$$(1 - e^{2p\pi i})I = -2\pi i e^{p\pi i}, \quad I = \frac{2\pi i}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

## 第六章 积分变换

- ① 傅里叶变换
- ② 拉普拉斯变换

在学习指数和对数的时候, 我们了解到利用对数可以将乘除、幂次转化为加减、乘除.

**例**

计算  $12345 \times 67890$ .

**解**

通过查对数表得到

$$\ln 12345 \approx 9.4210, \quad \ln 67890 \approx 11.1256.$$

将二者相加并通过反查对数表得到原值

$$12345 \times 67890 \approx \exp(20.5466) \approx 8.3806 \times 10^8.$$

而对于函数而言, 我们常常要解函数的方程.

**例**

解微分方程

$$\begin{cases} y'' + y = t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

**解**

我们希望能找到一种函数的**变换**  $\mathcal{L}$ , 使得它可以把函数的微分和积分变成代数运算, 计算之后通过**反变换**  $\mathcal{L}^{-1}$  求得原来的解.

这个变换最常见的就是我们将要介绍的**傅里叶变换**和**拉普拉斯变换**.

## 第一节 傅里叶变换

- 傅里叶级数
- 傅里叶积分与傅里叶变换
- 狄拉克  $\delta$  函数
- 傅里叶变换的性质
- 傅里叶变换在级数中的应用 \*
- 卷积 \*
- 傅里叶变换的应用 \*

## 周期函数的傅里叶级数展开

为了引入傅里叶变换, 我们回顾下傅里叶级数.

考虑定义在  $(-\infty, +\infty)$  上周期为  $T > 0$  的函数  $f(t)$ . 例如

$$1, \sin \omega t, \cos \omega t, \sin 2\omega t, \cos 2\omega t, \sin 3\omega t, \cos 3\omega t, \dots$$

的周期都是  $T$ , 其中  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . 类似于线性组合的概念, 我们希望将  $f$  表达为上述函数

的线性叠加. 如果  $f(t)$  在  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  上满足狄利克雷条件:

- 间断点只有有限多个, 且均为第一类间断点;
- 只有有限个极值点,

则我们有傅里叶级数展开:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t).$$

当  $t$  是间断点时, 傅里叶级数的左侧需改为  $\frac{f(t+) + f(t-)}{2}$ .





对于一般的函数  $f(t)$ , 它未必是周期的. 此时它无法像前面的情形一样, 表达成可数多个函数

$$\dots, e^{-2j\omega t}, e^{-j\omega t}, 1, e^{j\omega t}, e^{2j\omega t}, \dots$$

的线性叠加, 而是所有的  $e^{j\omega t}$ ,  $\omega \in (-\infty, +\infty)$  的叠加. 这种叠加的系数应当是无穷小方可, 而求和应当改为积分. 所以, 若记  $e^{j\omega t}$  的系数为函数  $\frac{1}{2\pi}F(\omega)$ , 则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

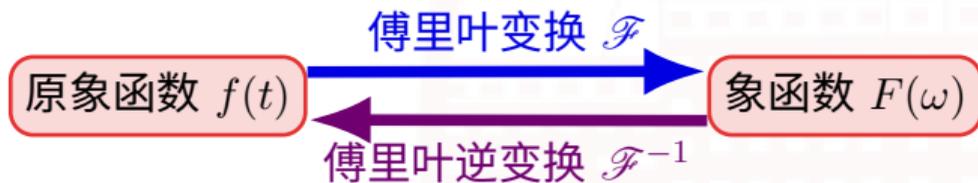


## 傅里叶积分定理

若  $f(t)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上绝对可积, 且在任一有限区间上满足狄利克雷条件, 则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

对于  $f(t)$  的间断点左边需要改成  $\frac{f(t+) + f(t-)}{2}$ .



如果  $f(t)$  表示随时间  $t$  变化的函数, 那么  $F(\omega)$  表示的是频率  $\omega$  的函数, 所以傅里叶变换是时域到频域的转变.

傅里叶积分公式有一些变化形式. 例如:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau}_{\omega \text{ 的偶函数}} + j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau}_{\omega \text{ 的奇函数}} \right] d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right] d\omega.
 \end{aligned}$$

此即傅里叶积分公式的三角形式.

若  $f(t)$  是偶函数, 则  $f(t) \cos \omega t$  是偶函数,  $f(t) \sin \omega t$  是奇函数,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

也是偶函数, 从而得到傅里叶余弦积分公式:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right] \cos \omega t d\omega.$$

类似地, 若  $f(t)$  是奇函数, 则  $F(\omega) = 2j \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$  也是奇函数, 且有傅里叶正弦积分公式:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] \sin \omega t d\omega.$$

## 例

求函数  $f(t) = \begin{cases} 1/2, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$  的傅里叶变换.

这是矩形脉冲函数.

## 解

由于  $f(t)$  是偶函数, 因此

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos \omega t dt = \frac{\sin \omega}{\omega}. \end{aligned}$$

它的傅里叶变换为 sinc 函数  $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

## 例: 求傅里叶变换

由傅里叶积分公式

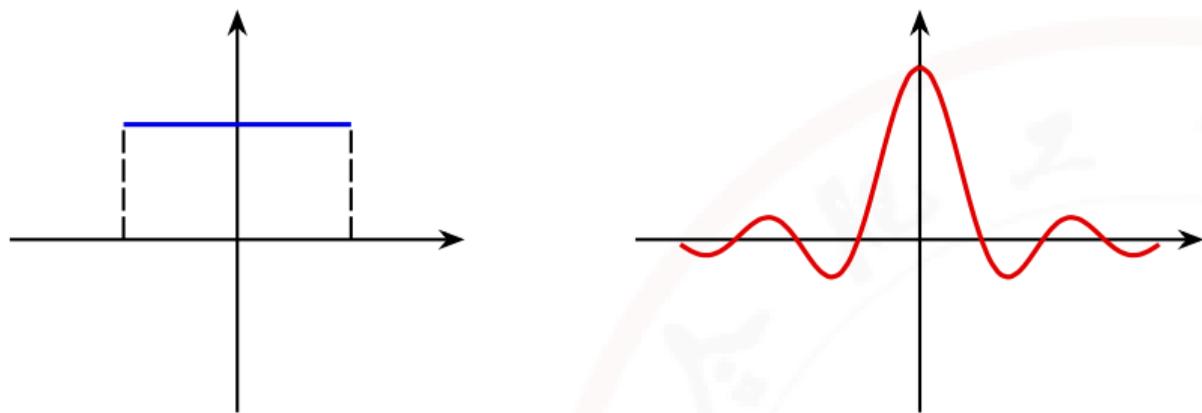
$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega. \end{aligned}$$

当  $t = \pm 1$  时, 左侧应替换为  $\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{4}$ . 由此可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \pi/2, & |t| < 1, \\ \pi/4, & |t| = 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

特别地, 可以得到狄利克雷积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$ .

## 例: 求傅里叶变换



我们将  $f(t), F(\omega)$  称为傅里叶变换对. 不难发现  $F(t), 2\pi f(-\omega)$  也是傅里叶变换对 (不连续点处值需要修改). 故

$$\mathcal{F}[\text{sinc}(t)] = \begin{cases} \pi, & |\omega| < 1, \\ \pi/2, & |\omega| = 1, \\ 0, & |\omega| > 1. \end{cases}$$













对于广义函数  $\lambda$ , 我们可以形式地定义  $\lambda(at), \lambda'$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(at) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) \cdot \frac{1}{|a|} f\left(\frac{t}{a}\right) dt,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda'(t) f(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) f'(t) dt.$$

由此可知

- $\langle \delta^{(n)}, f \rangle = (-1)^n f^{(n)}(0)$ , 其中  $f(t)$  是光滑函数.
- $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$ . 特别地  $\delta(t) = \delta(-t)$ .
- $u'(t) = \delta(t)$ , 其中  $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$  是单位阶跃函数.







## 证明

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega(t+t_0)} dt = e^{-j\omega t_0} F(\omega). \end{aligned}$$

逆变换情形类似可得.



由此可得

$$\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0}, \quad \mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega - \omega_0)] = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}.$$



















## 定理

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(2\pi n).$$

## 证明

考虑  $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n)$  的傅里叶展开:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t) e^{-2\pi j n t} dt &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+m) e^{-2\pi j n t} dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_m^{m+1} f(t) e^{-2\pi j n t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi j n t} dt = F(2\pi n). \end{aligned}$$

因此  $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(2\pi n) e^{2\pi j n t}$ . 令  $t=0$  即得. □

## 例

为了计算  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ , 考虑

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi + j\omega} + \frac{1}{2\pi - j\omega} = \frac{4\pi}{4\pi^2 + \omega^2}$$

的傅里叶逆变换

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = e^{-2\pi t \operatorname{sgn}(t)}.$$

于是

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(2\pi n) = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \pi \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi n} \right) = \frac{\pi}{\operatorname{th} \pi}.$$



## 证明

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f_1 * f_2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \cdot e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \cdot f_2(t - \tau) e^{-j\omega(t-\tau)} dt d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \cdot f_2(t) e^{-j\omega t} dt d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[f_1] \mathcal{F}[f_2]. \quad \square
 \end{aligned}$$

由函数的乘法性质可知卷积满足如下性质:

- $f_1 * f_2 = f_2 * f_1, (f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3);$
- $f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3;$
- $f * \delta = f;$
- $(f_1 * f_2)' = f_1' * f_2 = f_1 * f_2'.$

## 例

设  $f_1(t) = u(t)$ ,  $f_2(t) = e^{-t}u(t)$ . 求  $f_1 * f_2$ .

## 解

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} u(t - \tau) d\tau.$$

当  $t < 0$  时,  $(f_1 * f_2)(t) = 0$ . 当  $t \geq 0$  时,

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t}.$$

故  $(f_1 * f_2)(t) = (1 - e^{-t})u(t)$ .







## 例：使用傅里叶变换解微积分方程

例

$$\text{解方程 } y'(t) - \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = 2\delta(t).$$

解

设  $\mathcal{F}[y] = Y$ . 两边同时作傅里叶变换得到

$$j\omega Y(\omega) - \frac{1}{j\omega} Y(\omega) = 2,$$

$$Y(\omega) = -\frac{2j\omega}{1 + \omega^2} = \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{1}{1 - j\omega},$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{1}{1 - j\omega} \right] = \begin{cases} 0 - e^t = -e^t, & t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ e^{-t} - 0 = e^{-t}, & t > 0. \end{cases}$$



## 第二节 拉普拉斯变换

- 拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换的性质
- 拉普拉斯逆变换
- 卷积定理 \*
- 拉普拉斯变换的应用

傅里叶变换对函数要求过高, 这使得在很多时候无法应用它, 或者要引入复杂的广义函数. 对于一般的  $\varphi(t)$ , 为了让它绝对可积, 我们考虑

$$\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}, \quad \beta > 0.$$

它的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}] = \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-(\beta+j\omega)t} dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-st} dt,$$

其中  $s = \beta + j\omega$ . 这样的积分在我们遇到的多数情形都是存在的, 只要选择充分大的  $\beta = \operatorname{Re} s$ . 我们称之为  $\varphi(t)$  的拉普拉斯变换  $\mathcal{L}[\varphi]$ .

## 拉普拉斯变换存在定理

若定义在  $[0, +\infty)$  上的函数  $f(t)$  满足

- $f(t)$  在任一有限区间上至多只有有限多间断点;
- 存在  $M, c$  使得  $|f(t)| \leq Me^{ct}$ ,

则  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  在  $\operatorname{Re} s > c$  上存在且为解析函数.



虽然我们限定了函数只定义在  $t \geq 0$  处, 但很多时候这不影响我们使用. 这是因为在物理学中, 很多时候我们只考虑系统自某个时间点开始之后的行为.



























