线性代数 (复习课)

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

- 加减法和数乘、乘法.
- 一般 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$, 但 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{O}, f(\boldsymbol{B})/g(\boldsymbol{B})$ 时可以.
- 一般 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AB}$ 推不出 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, 但 $\boldsymbol{A}$ 列满秩时可以.
- 矩阵的幂: 对角阵、$\lambda \boldsymbol{E} + \boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ 情形, 或相似与这些矩阵情形.

转置、伴随、逆

- $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, $\quad (\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$, $\quad (\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.
- $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$, $\quad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$, $\quad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^*$.
- $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$, $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$, $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.
- $(\boldsymbol{A}^*)^* = \begin{cases} \boldsymbol{A}, & n = 2; \\ |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}, & n \geqslant 3. \end{cases}$
- $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n; \\ 1, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1; \\ 0, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2. \end{cases}$
- $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^{-1})$, $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$.
- $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff |\boldsymbol{A}| \neq 0 \iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n \iff \boldsymbol{A}$ 行最简形为 $\boldsymbol{E}$ $\iff \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{E} \iff \boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{E} \iff \boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{E} \iff \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解 $\iff \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 总有解 $\iff \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 总有唯一解 $\iff \boldsymbol{A}$ 特征值都非零.

- 行列式：$2, 3$ 阶直接算. 对角阵和三角阵行列式的计算, 分块情形类似.
- 一般用初等变换计算.
- $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) < n$ 时 $|\boldsymbol{A}| = 0$.
- $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$, $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$, $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$.
- 拉普拉斯展开, 以及 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{jk} = 0$ 或 $|\boldsymbol{A}|$.
- 特殊形状行列式的计算, 范德蒙行列式.
- 互换两行 (列) 后, 方阵的行列式变为 -1 倍.
- 方阵的某一行 (列) 乘 k 后, 方阵的行列式变为 k 倍.
- 将方阵某一行 (列) 对应向量写成两个向量之和, 则行列式也可对应拆成两个行列式之和.
- 具有相同的两行 (列) 的方阵的行列式为零: $|\cdots, \boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}, \cdots| = 0$.
- 若方阵有一行 (列) 全为零, 则行列式为零: $|\cdots, \boldsymbol{0}, \cdots| = 0$.
- 若方阵有两行 (列) 成比例, 则行列式为零: $|\cdots, \boldsymbol{v}, \cdots, k\boldsymbol{v}, \cdots| = 0$.

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 列向量组分别为 S,T.

- 线性组合: $\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m \iff \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 有解 $\iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$.
- 线性无关: $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$ 只有零解 $\iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(S)=m$.
- 线性相关: 存在不全为零的数使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0} \iff \mathrm{R}(S)<m$.
- T 可以被 S 线性表示 $\iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 有解 $\iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.
- S,T 向量组等价 $\iff \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$ 有解 $\iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.
- 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, $(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关 $\iff \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解.
- 向量组线性相关 $\iff$ 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.
- 若 S 线性无关, $S\cup\{\boldsymbol{\beta}\}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 S 唯一线性表示.
- 整体无关 $\Longrightarrow$ 部分无关.
- 低维无关 $\Longrightarrow$ 高维无关.
- 多的由少的表示, 多的一定线性相关.

- 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$, 则存在非零的 r 阶子式, 但所有的 $r+1$ 阶子式都是零.
- 设 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}$, 则 $0\leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})\leqslant \min(m,n)$.
- $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=0 \iff \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;
- n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$;
- $\mathrm{R}(k\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}), k\neq 0$;
- $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B} \iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$;
- $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\big(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\big)$;
- 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times \ell}=\boldsymbol{O}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$;
- $\mathrm{R}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$. 特别地, $\max\big(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\big)\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.
- $S_0\subseteq S$ 是极大无关组, 如果下面任意两条满足: S_0 大小是 $\mathrm{R}(S)$; S_0 和 S 等价; S_0 线性无关.

- 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = r$. 线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系包含 $n-r$ 个向量.
- 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) < \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 无解;
- 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = n$, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解;
- 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) < n$, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

方阵

- 正交阵: 行 (列) 向量组是标准正交基.
- $\boldsymbol{A}$ 正交 $\iff$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^{*}$ 也正交.
- $|\boldsymbol{A}| = \pm 1$.

- 特征值: 解特征多项式.
- 对角元之和 $=$ 迹 $\mathrm{Tr}(A) =$ 特征值之和. ($\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^2) =$ 特征值平方和)
- 行列式 $=$ 特征值乘积.
- $g(\boldsymbol{A})/h(\boldsymbol{A})$ 的特征值, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}^{*}, \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 特征值.

- 对称阵: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 反对称阵: $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

矩阵关系

- 行等价: $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{P}$ 可逆 $\iff$ 行向量组等价 $\iff$ 列向量组保持线性关系 $\iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 等价.
- 等价: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 可逆 $\iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

- 相似: 若 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 则特征值、迹、行列式、特征多项式相同.
- 可对角化 $\iff$ 有 n 个线性无关特征向量 (作为 $\boldsymbol{P}$ 的列). 特征值两两不同, 或对所有特征值 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = n - k$ (λ 是 k 重).
- 不同特征值的特征向量线性无关.

- 相合: 即二次型等价 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. 特征值特征向量 (可) 全实, 可对角化. 标准型 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_p, -\boldsymbol{E}_{r-p}, \boldsymbol{O})$.
- 正交相合: $\boldsymbol{P}$ 是正交阵. 将特征向量正交单位化.
- 正定: 特征值全正, $p = n$, 顺序主子式全正 ($\Longrightarrow$ 对角元全正).

极大线性无关组和秩的计算方法

(1) 将向量组以列向量形式组成矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

(2) 通过初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 变为行阶梯形矩阵.

- 行阶梯形矩阵非零行的行数就是秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$;
- 行阶梯形矩阵每个非零行的首个非零元对应的 $\boldsymbol{A}$ 的列向量, 就是极大线性无关组.

(3) 继续化简为行最简形矩阵, 则可将其余向量表示为极大线性无关组的线性组合.

(1) 将系数矩阵通过初等行变换化为行最简形.
(2) 将矩阵重新写成方程形式 $x_i + \cdots = 0$.
(3) 移项, 使得等式左侧只有阶梯拐角列 i 对应的 $x_i = \cdots$.
(4) 添加 $n-r$ 项 $x_j = x_j$, 使得等式左边凑成 $\boldsymbol{x}$.
(5) 等式右侧是非拐角列 j 对应的 x_j 的组合, 其系数形成的 $n-r$ 个向量就是基础解系.

(1) 写: 写出方程组对应的增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$;

(2) 变: 通过初等行变换将其化为行最简形;

(3) 判: 通过行最简形判定方程是否有解;

(4) 解: 若系数矩阵部分零行对应的常数项均为零, 则方程有解.

(5) 类似于齐次情形, 将矩阵重新写成方程形式、移项、添恒等式, 使得等式左边凑成 $\boldsymbol{x}$.

(6) 等式右侧的常数部分是特解，其余是非拐角列 j 对应的 x_j 的组合, 其系数形成的 $n-r$ 个向量就是基础解系.

格拉姆-施密特正交化

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 \\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\beta}_r &= \boldsymbol{\alpha}_r - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \cdots - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}{[\boldsymbol{\beta}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}\boldsymbol{\beta}_{r-1}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}, \ldots, \boldsymbol{e}_r = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_r}{\|\boldsymbol{\beta}_r\|}$ 就是 V 的一组标准正交基.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$;
(2) 解 $f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ 得到特征值;
(3) 对于每一个特征值 λ_i, 解 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 其非零解就是对应特征向量.

相似对角化:

(1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 λ_i 和特征向量 $\boldsymbol{p}_i$;
(2) 若 k 重特征值均有 k 个对应的线性无关的特征向量, 则可对角化.
(3) 若能, 将 n 个对应的线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_n$ 组成方阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_n)$,

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n).$$

实对称阵的正交合同对角化, 或求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将实二次型 f 化为标准形:

(1) 写出 f 对应的对称阵 $\boldsymbol{A}$.
(2) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.
(3) 若特征值是 k 重的, 求出 k 个特征向量后, 用格拉姆-施密特方法将其正交单位化.
(4) 这些特征向量构成正交阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为这些特征向量对应的特征值构成的对角阵.
(5) 写出正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 以及对应的实二次型 $f=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$.

求可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将实二次型 f 化为规范形:

(1) 求出正交变换 $\boldsymbol{Q}$ 使得
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n).$$
(2) 取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(\sqrt{|\lambda_1|},\ldots,\sqrt{|\lambda_n|})^{-1}$, 零特征值对应位置任取非零数.

也可用配方法. 若只求规范形, 可只看特征值正负号.