

# 中国科学技术大学试卷 (A)

2010~2011 学年第二学期

复变函数 (001012)

本卷中  $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ ,  $B(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ .

一、(20 分) 以下陈述是否正确? 如果不正确请给出理由.

1. 存在  $B(0, 1) - \{0\}$  上的无界全纯函数  $f$  使得  $\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = 0$ .
2. 存在  $B(0, 1)$  上的全纯函数  $f$  使得  $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n, n = 2, 3, \dots$
3. 存在  $\mathbb{C}$  上的非零全纯函数  $f$  有无穷多零点.
4. 设  $D$  是  $\mathbb{C}$  中的域,  $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$ , 则  $f$  一定能在  $D$  的边界上取得最大模.
5. 设  $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ ,  $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$  满足  $f(ai) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$ , 则  $f$  恒等于零.
6. 设  $D = B(\infty, R), f, g \in H(D) \cap C(\bar{D}), R > 0$  满足  $f(z) = g(z), \forall z \in \mathbb{C}, |z| = R$ , 则  $f$  恒等于  $g$ .
7.  $\infty$  是  $\sin\left[\frac{1}{\cos(1/z)}\right]$  的本性奇点.
8.  $\frac{z}{e^z - 1}$  在  $\mathbb{C}$  上亚纯.
9.  $B(0, 1)$  的全纯自同构必为分式线性变换.
10. 若整函数  $f$  将实轴和虚轴均映为实数, 则  $f'(0) = 0$ .

二、(30 分) 计算题.

1.  $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^3(z-3)}$ .
2.  $\int_{|z|=2} \frac{z+1}{z^2(z^3+2)} dz$ .
3.  $\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{\sin z} dz$ .
4.  $\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{(z+1)^n}, \infty\right]$ .
5.  $e^{\frac{1-z}{z}}$  在扩充复平面上有哪些奇点? 并求出在  $D = B(\infty, 1)$  上的 Laurent 展开.

三、(10 分) 设  $f \in H(B(0, 1))$ ,  $f(0) = 1$ , 并且  $\operatorname{Re} f(z) \geq 0, \forall z \in B(0, 1)$ . 证明

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq \operatorname{Re} f(z) \leq |f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}, \quad \forall z \in B(0, 1).$$

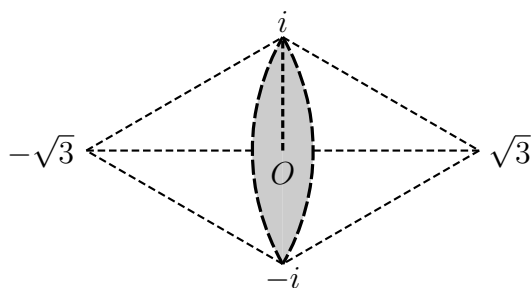
四、(10 分) 利用辐角原理或 Rouché 定理证明代数学基本定理.

五、(10 分) 设  $\gamma$  是圆周  $\partial B(a, R)$  上的一段开圆弧. 证明: 若  $f$  在  $B(a, R)$  上全纯, 在  $B(a, R) \cup \gamma$  上连续, 并且在  $\gamma$  上恒为零, 则  $f$  在  $B(a, R)$  上也恒为零.

六、(10 分) 求一单叶全纯映射, 把  $D$  映为上半平面, 其中

$$D = \Omega - [0, i], \quad \Omega = B(\sqrt{3}, 2) \cap B(-\sqrt{3}, 2),$$

这里  $[0, i]$  表示连接 0 和  $i$  的线段.



七、(10 分) 设  $\gamma$  是可求长简单闭曲线, 其内部为域  $G_1$ , 外部为域  $G_2$ . 如果  $f \in H(G_2) \cap C(\overline{G_2})$ , 而且  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$ , 那么

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} -f(z) + A, & z \in G_2; \\ A, & z \in G_1, \end{cases}$$

这里  $\gamma$  关于  $G_1$  取正向.